

Der
Anfangs = Gründe
aller
Mathematischen
Wissenschaften

Letzter Theil,
Welcher so wohl die gemeine
Algebra, als die Differential- und
Integral-Rechnung, und einen
Anhang

von den vornehmsten

Mathematischen Schriften

in sich begreift,

Und zu mehrerem Aufnehmen der
Mathematick so wohl auf hohen, als
niedrigen Schulen, aufgesetzt worden

Von

Christian Frenherrn von Wolff,

Seiner Königl. Majestät in Preussen Geheimen Rathe und
Cansler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ &
Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg,
der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der
Königl. Groß-Britannischen und der Königl. Preussl.
Societät der Wissenschaften Mitgliede.

Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.

Halle im Magdeburgischen,
Zu finden in der Kengerischen Buchhandlung.

1 7 5 0.

Anfangs = Gründe

sowohl der gemeinen

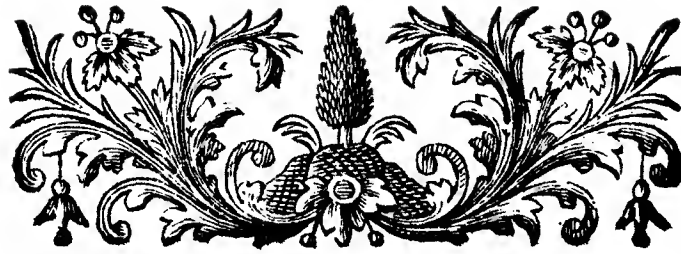
Algebra,

als der

Differential=

und

Integral-Rechnung.



V o r r e d e.

Geehrter Leser,

Die Algebra kan niemals zuviel gerühmt werden: denn sie ist eine Kunst, durch welche man mathematische Wahrheiten von sich selbst erfinden kan. Wenn ihr demnach die Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften, welche ich in den drey vorhergehenden Theilen erkläret habe, euch bekant machet und die Algebra dabey studiret; so werdet ihr aus jenen durch diese vor euch selbst finden können, was ihr sonst aus Büchern oder von andern zulernen von nöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können, was andere vor euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte, sie macht euch geschickt, daß, wenn ihr nur gank was geringes aus den mathematischen Wissenschaften gelernet habt, ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet, zu der Zeit,
Wissen

wenn ihr es von nöthen habt. Es ist aber keine vollkommenerere Art zu studiren, als wenn man nur wenig lernen darf, und sich dabey auf alle vorkommende Fälle geschickt macht. Ich sage aber noch mehr. Ihr trettet in der Algebra die allervollkommenste Manier zuraisoniren an. Denn sie stellet die Begriffe der Sachen durch Zeichen vor, und verwandelt die Schlüsse, welche mit vielem Bedachte aus ihnen hergeleitet werden, in eine leichte Manier, die Zeichen mit einander zuverknüpfen und von einander zutrennen. Dadurch erhält man öfters in einer Zeile mehr, als in großen Büchern nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen weniger Zeichen werdet ihr öfters verständiger, als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zu lernen und zudencken nicht werden könnet. In dieser Absicht pflegt man die Algebra den Gipfel menschlicher Wissenschaften zunennen. Ich habe demnach sowohl die gemeine Algebra, als die unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklären wollen, daß nicht allein ihre Kunst-Griffe unvermerckt beygebracht, sondern auch die Haupt-Lehren von der so genannten Mathesi pura zugleich mit erlernet, ja von selbst gefunden werden können.

An.

Anfangs = Gründe der Algebra.

Der erste Theil,
von den
Anfangs = Gründen der
gemeinen Algebra.

Die I. Erklärung.

Die gemeine Algebra ist eine Wissenschaft, aus einigen gegebenen endlichen Größen, andere ihres gleichen, von welchen, in Ansehung der gegebenen etwas bekannt gemacht wird, vermittlest gewisser Gleichungen zu finden.

Die I. Anmerkung.

2. 3. E. Ihr sollt zwei Zahlen finden, welche mit einander multipliciret, eine gegebene Zahl 60, hingegen zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 16 bringen. Also werden euch gegebenen zwei Zahlen, und ihr sollt aus denselben zwei andere Zahlen finden, von welchen euch bekannt gemacht wird, daß ihre Summe der kleinern, ihr Product aber der größern von den gegebenen Zahlen gleich seyn soll. Die Algebra nun lehret euch nicht allein in gegenwärtigem Falle die verlangten Zahlen, sondern auch eine allgemeine Regel finden, nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Zusatz.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechen-Kunst, durch welche man nemlich alles, was sich rechnen läßt, ausrechnen kan (*S. 1 Arithm.*).

Die 2. Anmerkung.

4. Daher nennet auch der große Mathematicus in Engelland, Herr Isaac Newton, seine Anweisung zur Algebra *Arithmetica Universalis*, und wir können die Algebra in unserer Deutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechen-Kunst heißen, zumal, wenn man die Buchstaben-Rechen-Kunst mit dazu nimt.

Die 2. Erklärung.

5. Die Buchstaben Rechen-Kunst wird diejenige genennet, welche an statt der Ziffern, allgemeine Zeichen der Grössen braucht, und damit die gewöhnlichen Rechnungs-Arten verrichtet.

Die 3. Erklärung.

6. Eine Grösse nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren oder vermindern läßt, in so weit es sich vermehren läßt.

Der 1. Zusatz.

7. Also beziehet das Wesen einer Grösse in der Verhältniß zu einer andern ihres gleichen (*S. 65 Arithm.*).

Die 1. Anmerkung.

8. Z. E. Die Wärme nenne ich in so weit eine Grösse, als ich denken kan, wie vielmal eine gegebene Wärme, als die Wärme der Luft des heutigen Tages,

Tages in einer andern gegebenen Wärme, als in der Wärme des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

9. Und folglich sind die Grössen undeterminirte Zahlen, da man nemlich noch kein gewisses Eins sezet (I. 5, 8 *Arithm.*).

Die 2. Anmerkung.

10. Nehmet z. E. eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Sehet, die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eins machet, und die Länge der ganzen Linie mit ihm vergleicht: so heißt die Linie 4, und ihr betrachtet die Länge als eine Zahl. Sehet abermals, die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen davon zur Eins machet, und die Länge der ganzen Linie mit ihr vergleicht; so heißt die Linie 5, und ihr betrachtet ihre Länge abermals als eine Zahl. Wiederum sehet, die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile, und vergleicht ihre ganze Länge mit einem solchen Theile, so heißt sie 13, und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr, daß die Länge einer Linie durch ungezählich viel Zahlen große und kleine ausgesprochen werden kan, nachdem ihr nemlich einen großen oder kleinen Theil derselben zur Eins annehmet. Wenn ihr nun keinen gewissen Theil sehet, mit welchem sie verglichen werden soll; sondern sie nur überhaupt betrachtet, in so weit sie mit einer gewissen Eins kan verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Grösse vor. Und daher kommt es, daß durch die Buchstaben-Rechen-Kunst sehr allgemeine Wahrheiten erfunden werden: da hingegen die Rechen-Kunst nur einzelne Exempel ausrechnet, und also stets mit einzelnen Fällen zuthun hat.

Der 3. Zusatz.

11. Alles, was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden, hat in allem dem,
was

was es würcklich ist, und wovon sich etwas gedencken läßt, seine Schrancken und läßt sich dannenhero mit andern Dingen von seiner Art vergleichen, und darum als etwas, welches vermehret oder vermindert werden kan, das ist, als eine Grösse (§. 6, 7) betrachten. Derowegen erstreckt sich die Buchstaben-Rechen-Kunst und Algebra auf alle endlichen Dinge, und führet uns auf einen deutlichen Beariff von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerckung.

12. Es kan keine vollkommenere Erkenntniß gedacht, noch verlangt werden, als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begriff erlangt hat: welches ich bey anderer Gelegenheit klar und deutlich ausführen will. Daher dienet die Algebra, zu einer vollkommenen Erkenntniß der Dinge zugelangen, und ohne sie würde es in den meisten Fällen unmöglich gewesen seyn, selbige zu überkommen.

Der 4. Zusatz.

13. Weil die Grössen und determinirte Zahlen sind (§. 9), so kan man auch keine andern Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, oder in einander multipliciren, oder durch einander dividiren (I. 13, 15, 18, 21, 24 *Arithm.*).

Die 4. Anmerckung.

14. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet, ihr müßet euch vorher dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert, daß ihr für die Grössen gewisse Zeichen ersinnet.

Der

Der 1. willkürliche Satz.

15. Man benenne die gegebenen Gröſſen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Alphabets, a, b, c, d u. s. w. die unbekannten aber, welche man sucht, mit den letzten, x, y, z .

Die 1. Anmerkung.

16. Wie sich die Gröſſen dem Verstande zu erkennen geben, so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor, entweder als gegebene, das ist, bekant gemachte, oder als gesuchte, das ist, noch unbekannte Gröſſen: Dero wegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungskraft diesen Unterscheid klärlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr, daß man das Unbekante mit dem Bekanten verwechselte, und daher in Irrtum verfiel.

Die 2. Anmerkung.

17. Es wäre bey der Benennung der Gröſſen noch gar viel zu erinnern. Denn, wenn sie geschickt und zu dem Erfinden dienlich seyn soll, so müssen die Zeichen alle gegebene relationes der bedeuteten Dinge gegeneinander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekannten Gröſſen drey mal so groß ist als die andere, und die kleinere heißt x ; so nennet man die gröſſere lieber $3x$ als y . Allein, ich würde den Anfängern nicht dienen, wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmal überhäufte. Und halte es dannerhero für rahtsamer, daß ich es inskünftige lieber durch Exempel lehre, und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerckt und ohne Mühe bringe.

Der 2. willkürliche Satz.

18. Das Zeichen der Addition ist $+$, der Subtraction aber $-$. Jenes wird (Wolfs Mathes. Tom. IV.) $\text{E}ff\ ff$ durch

durch Mehr; dieses durch Weniger ausgesprochen.

Anmerkung.

19. 3. E. Die Summe zweier Grössen a und b wird geschrieben $a + b$, und ausgesprochen: a mehr b . Hingegen die Differenz zweier Grössen wird geschrieben durch $a - b$, und ausgesprochen: a weniger b . Als: es bedeute a 7 Thaler, b 8 Groschen; so bedeutet $a + b$ 7 Thl. + 8 gl. das ist, 7 Thl. und 8 gl. hingegen $a - b$ 7 Thl. — 8 gl. das ist, 7 Thl. weniger 8 gl.

Der 3. willkührliche Satz.

20. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzt die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein Comma (,) oder einen Punct (.) an. Insgemein braucht man dieses Zeichen \times .

Anmerkung.

21. Wenn a durch b multiplicirt werden soll, so schreibt das Product ab , oder a, b oder $a. b$, oder $a \times b$. Wir werden uns des letzten Zeichens niemals bedienen, weil es leicht mit dem \times verwechselt wird. Doch haben wir es hiermit anführen wollen, weil es in allen Büchern häufig vorkommt. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das Comma und den Punct aber nur in gewissen Fällen aus besondern Ursachen, welche sich zu seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4. willkührliche Satz.

22. Wenn eine Grösse viele andere auf einmal multiplicirt, so schließt man sie in eine parenthesin () ein, und setzt jene ohne

ohne einiges Zeichen vor oder hinter die
parenthesin: oder man setzt zwischen die-
selben ein bloßes Comma.

Anmerkung.

23. Das Product von $a + b - c$ in d schreibt
entweder also: $(a + b - c)d$, oder dergestalt:
 $d(a + b - c)$, oder auch folgender maßen:
 $a + b - c, d$. Inſsgemein schreibt man dieſes

Product also: $a + b - c \propto d$, oder auch

$d \propto a + b - c$. Allein, wir bleiben billig bey der
Manier des Herrn von Leibniz, welche mit großem
Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsientia eingefüh-
ret worden iſt: denn, man kan ſich nicht ſo leicht verir-
ren, wie bey dem gemeinen Zeichen, und macht auch
den Buchdruckern nicht ſo viel unnöthige Mühe, er-
ſparet über dieſes viel an dem Raume. Anderer Vor-
theile wollen wir jezt nicht gedencken, welche ſich im
folgenden zeigen werden.

Der 5. willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division ſind zween
Puncte:, oder man ſchreibt die Buch-
ſtaben, welche einander dividiren ſollen,
wie in der Rechen-Kunſt einen Bruch.

Anmerkung.

25. Wenn a durch b dividirt werden ſoll, ſo ſchrei-
be man den Quotienten entweder $a:b$, oder $\frac{a}{b}$ und
ſpreche es beyderſeits aus: a durch b dividirt.

Der 6. willkührliche Satz.

26. Wenn eine Gröſſe viele andere auf
einmal dividirt, oder viele andere eine
divi-

dividiren, so werden, wie in der Multiplication, die vielen in eine parenthesin () eingeschlossen, oder man kann auch an deren statt ein Comma brauchen.

Anmerkung.

27. Wenn $a + b$ durch c dividirt werden soll, so schreibet den Quotienten entweder $(a + b) : c$, oder $a + b, : c$. Sollet ihr a durch $b + c$ dividiren, so ist der Quotient $a : (b + c)$ oder $a, : b + c$. Wiederum, wenn ihr $a + b$ durch $c + d$ dividiret, so schreibet den Quotienten $(a + b) : (c + d)$ oder $a + b, : c + d$. Nach der gemeinen Art schreibet ihr diese Quotienten $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, oder auch

$$\frac{a+b}{c}, \frac{a}{b+c}, \frac{a+b}{c+d}, \text{ oder auch } a+b:c, a:b+c, a+b:c+d.$$

Die I. Aufgabe.

28. Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zu addiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zehlet sie, wie in der Rechen-Kunst, zusammen.
2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der grössern die kleinere ab, und setzet zu dem, was überbleibt, das Zeichen der grössern.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a + 2b - 3c - 5d \\ 3a - 2b + 6c + 2d \\ \hline 4a \quad + 3c - 3d. \end{array}$$

Be-

Beweis.

Weil die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (§. 9, 15); so könnet ihr einen jeden als Eins ansehen, und demnach die Gröſſen, welche durch einerley Buchstaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art, zusammenzählen (s. 8 *Arithm.*). Alle Gröſſen, welche mit dem Zeichen — bemerckt werden, fehlen, und hingegen die, welche das Zeichen + haben, sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren soll, so wird durch die letztern der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden. W. Z. E. W.

Die 1. Anmerkung.

29. Die Gröſſen, welche mit dem Zeichen — bemerckt werden, hat man nicht anders, als Schulden anzusehen, und hingegen die andern mit dem Zeichen + als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten weniger als nichts, weil man erst so viel weggeben muß, als man schuldig ist, ehe man nichts hat.

Die 2. Anmerkung.

30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher werde, so bildet euch ein, a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

$7a - 9b + 5c$	$7 \text{ thl.} - 9 \text{ gl.} + 5 \text{ pf.}$
$3a + 5b - 9c$	$3 \text{ thl.} + 5 \text{ gl.} - 9 \text{ pf.}$
$10a - 4b - 4c$	$10 \text{ thl.} - 4 \text{ gl.} - 4 \text{ pf.}$

3

Die

Die 2. Aufgabe.

31. Einerley Gröffen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Wenn einerley Zeichen sind, und ihr sollet das Kleinere von dem Größern abziehen, so verrichtet die Subtraction, wie in Ziffern (§. 49 Arithm.).
2. Sollet ihr aber die grössere von der kleinern abziehen, so ziehet die kleinere von der grössern ab, und zu dem übrigien setzet das Zeichen —, wenn die Gröffen + haben: hingegen +, wenn sie — haben.
3. Wenn die Zeichen verschieden sind, so addiret die Gröffen, welche ihr von einander abziehen sollet, und zu der Summe setzet das Zeichen derjenigen Grösse, von welcher die Subtraction geschehen solte.

Exempel.

$$8a - 5c + 9d \quad 8 \text{ thl.} - 5 \text{ gl.} + 9 \text{ pf}$$

$$6a - 8c - 7d \quad 6 \text{ thl.} - 8 \text{ gl.} - 7 \text{ pf.}$$

$$2a + 3c + 16d \quad 2 \text{ thl.} + 3 \text{ gl.} + 16 \text{ pf.}$$

$$9b + 15c - 7d + 8e - f$$

$$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$$

$$3b - 5c + 2d + 17e - 8f.$$

Oder, verwandelt die Zeichen in niedrige von den Gröffen, welche ihr abziehen sollet, und addiret sie zu den andern (§. 28).

Be:

Beweis.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eins anse-
hen könnet (§. 9, 15); so könnet ihr auch, wie
in Zahlen, die Subtraction verrichten. Al-
lein, wenn ihr die grössere von der kleinern
abziehet, und sie haben das Zeichen $+$, als $20c$
von $15c$, so nehmet ihr $20c$ weg, ihr müßet
aber wieder von oben die $15c$ addiren, und
dannhero fehlen nur noch so viel c , als der
Unterscheid zwischen 20 und 15 ist, nemlich 5 .
Hingegen wenn das Zeichen $-$ ist, als wenn
ihr $-9d$ von $-7d$ abziehen sollet; so müßet
ihr $-9d$ addiren, weil ihr es zu viel abgezog-
en habt. Denn, ihr soltet $20c - 9d$ weg-
nehmen: ihr habt aber $20c$ ganz weggenom-
men. Da nun oben $7d$ fehlen, so heben sich
von den $9d$, welche ihr dazu addiret, 7 auf,
und bleiben nur noch $2d$ übrig. Darum dür-
fet ihr in diesen Fällen nur allezeit die kleinere
von der grössern abziehen, und zu dem übrig-
en das widrige Zeichen setzen, nemlich $-$,
wenn ihr $+$ habt, und $+$, wenn $-$ ist. End-
lich, wenn die Zeichen verschieden sind, und
ihr sollet z. E. $-9c$ von $+$ $8c$ abziehen; so
wisset ihr aus dem vorhergehenden, daß die
unteren $9c$ addirt werden müssen, weil ihr zu
viel in dem vorhergehenden abgezogen habt.
Und demnach bekommet ihr $+$ $17c$. Hinge-
gen, wenn ihr z. E. $+$ $7f$ von $-f$ subtrahiren
sollet; so fehlet euch schon ein f . Wenn ihr
nun die $7f$ auch wegnehmen sollet, so fehlen
Iff ff 4 euch

euch zusammen 8f. Daher habt ihr in beyden Fällen nur nöthig, die Gröffen zu addiren, und zu der Summe das Zeichen zusetzen, welches die Gröffe hat, von welcher die Subtraction geschiehet. W. 3. E. W.

Die 3. Aufgabe.

32. Gröffen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multipliciren.

Auflösung.

Berichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 55 *Aritbm.*), nur mercket: daß einerley Zeichen in dem Producte +, verschiedene aber — geben.

Exempel.

$$\begin{array}{rcl}
 a + b - d & 10 = 8 + 4 - 2 \\
 a - b - d & 2 = 8 - 4 - 2 \\
 \hline
 -ad - bd + dd & - 16 - 8 + 4 \\
 -ab - bb + bd & - 32 - 16 + 8 \\
 aa + ab - ad & 64 + 32 - 16 \\
 \hline
 aa - bb - 2ad + dd. & 20 = 68 - 48.
 \end{array}$$

Beweis.

Wenn ihr + durch + multipliciret, so ist klar, daß das Product auch + haben muß. Ungleich ist nicht schwer zu begreifen, daß in dem Producte das Zeichen — seyn muß, wenn ihr + durch — multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etliche mal nehmet. Allein, wenn — durch — multipli-

cirt

eirt wird, so scheint es nicht gleich klar zu seyn, warum in dem Producte $+$ ist. Mercket demnach, daß, wenn ihr $3 - 2$ durch $- 2$ multipliciren sollet, ihr den Defect $- 2$ so viel mal nehmen sollet, als $3 - 2$ Einheiten hat; das ist, 1 mal. Da ihr nun anfangs 3 mit $- 2$ multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mal, und demnach 2 mal zu viel. Derowegen müßet ihr ihn noch zweymal dazu addiren. Und also giebt $- 2$ mit $- 2$ zum Producte $+$ 4.
W. Z. E. W.

Zusatz.

33. Wenn ihr $- a$ mit $+$ b multipliciret, so kommt $- ab$ heraus. Derowegen, wenn ihr $- ab$ durch $+$ b dividiret, so muß $- a$ heraus kommen. Dividiret ihr aber $- ab$ durch $- a$, so muß $+$ b heraus kommen. Demnach ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: Einerley Zeichen geben in dem Quotienten $+$, verschiedene aber $-$.

Die 4. Aufgabe.

34. Gröſſen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.

Auſlösung.

Wenn eine gegebene Gröſſe durch die andere sich würcklich dividiren läßt; so verfähret, wie in Zahlen (§ 59 *Arithm.*), nur daß ihr die Regel von den Veränderungen der Zeichen wohl in acht nehmet (§. 33).

Kan aber die Division nicht würcklich geschehen, so bleibt es bey dem, was oben (§. 24 & seqq.) ist gesagt worden.

Exempel.

$$\begin{array}{rcl}
 & aa - bb - & ad \mp dd \quad (a \mp b - d) \\
 a - b - d & aa - ab - & ad \\
 \hline
 & \mp ab - bb - & ad \mp dd \\
 a - b - d) & \mp ab - bb - & bd \\
 \hline
 & \mp bd - ad \mp & dd \\
 a - b - d) & - ad \mp bd \mp & dd
 \end{array}$$

Anmerkung.

35. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen; so dürfet ihr euch hier an keine Ordnung binden, sondern möget den Quotienten suchen, in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Products aus dem Divisore in den Quotienten statt findet.

Die 4. Erklärung.

36. Wenn man eine Grösse durch sich selbst multiplicirt, so heist das Product, welches heraus kommt, die andere Potenz oder Dignität derselben Grösse. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmal durch die erste, so kommt die dritte Potenz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste, so kommt die vierte Potenz oder

oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierte durch die erste, so kommt die fünfte Potenz oder Dignität heraus u. s. w. Die erste Stamm-Größe, welche die erste Dignität genennet wird, heißt auch die Wurzel, in Ansehung der andern, dritten, vierten, fünften 2c. Dignität.

Der 7. willkührliche Satz.

37. Den Grad der Potenz oder Dignität einer Größe deutet durch eine kleine Ziffer, oder, wenn er nicht determinirt ist, durch einen kleinen Buchstaben an, welchen ihr oben zur Rechten an diejenigen Buchstaben setzet, wodurch die Größe benennet wird. 3. B. Die andere, dritte, vierte 2c. Dignität von x ist $x^2, x^3, x^4, 2c. x^m$. Die Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zusatz.

38. Dannenhero, wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurzel multipliciren sollet, so dürfet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

$$\begin{array}{r} x^3 \\ x^4 \\ \hline x^7 \end{array} \quad \begin{array}{r} y^m \\ y^n \\ \hline y^{m+n} \end{array} \quad \begin{array}{r} x^m \\ x^r \\ \hline x^{m+r} \end{array} \quad \begin{array}{r} x^n \\ x^n \\ \hline x^{2n} \end{array}$$

Der

Der 2. Zusatz.

39. Hingegen, wenn ihr die Dignität einer Gröſſe durch eine andere Dignität derselben dividiren ſollet; ſo dürfet ihr nur ihre Exponenten von einander ſubtrahiren.

Exempel.

$$\begin{array}{r} x^7 \\ x^4 \\ \hline x^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^7 \\ x^3 \\ \hline x^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} y^{m+n} \\ y^n \\ \hline y^m \end{array} \quad \begin{array}{r} y^n \\ y \\ \hline y^{n-1} \end{array}$$

Der 3. Zusatz.

40. Endlich, wenn ihr die Dignität einer Gröſſe zu einer andern Dignität erheben ſollet, ſo dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der andern multipliciren. Z. E. Ihr ſollet x^3 zu der vierten Dignität erheben; ſo multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} vor die geſuchte Dignität an. Oder überhaupt iſt die Dignität n von $y^m = y^{mn}$.

Anmerkung.

41. Die Urfach iſt leicht zu errathen. Denn, ihr ſollt den Exponenten 3 viermal zu ſich ſelbſt addiren (§. 38). Dieſes aber geſchiehet, wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 23 *Arithm.*).

Der 4. Zusatz.

42. Folglich, wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen ſollet, das iſt, diejenige Gröſſe finden, welche zu einer gewiſſen Dignität iſt erhoben worden, (§. 20, 21 *Arithm.* & §. 36 *Algebr.*); ſo dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der

der Wurzel dividiren. 3. E. Die Wurzel der vierten Dignität aus x^{12} ist x^3 , die Wurzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerkung.

43. Mercket wohl diese Art, die Wurzeln zu zeichnen, denn ihr werdet inständige großen Vortheil davon haben.

Der 8. willführliche Satz.

44. Wenn ihr die Wurzel aus einer Größe ziehen sollet, dergleichen sie nicht hat, so setzet folgendes Wurzel-Zeichen vor sie, und darüber den gehörigen Exponenten der Wurzel: in der Quadrat Wurzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen. Also schreibet ihr die cubic-Wurzel von x , $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurzel der fünften Dignität von x schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

45. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42); so könnet ihr jederzeit eine Formel in die Stelle der andern setzen, nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 5. Erklärung.

46. Die Wurzel dergleichen Größen, woraus die verlangte Wurzel nicht genau gezogen werden kan, werden irrational-Größen, oder, wenn es Zahlen sind, irra-

irrational-Zahlen genennet. Dergleichen sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

Anmerkung.

47. Die irrational-Größen können entweder eine Benennung haben, als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$, oder verschiedene, als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

48. Irrational-Größen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zu bringen.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen irrational-Größen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterscheid der Benennung in dem Unterscheide der Exponenten $n:m$ und $r:s$ bestehet, hingegen man diese Brüche in andere gleichgültige verwandeln kan, welche einerley Benennung haben (§. 81 *Arithm.*); so ist weiter nichts vonnöthen, als daß ihr die Exponenten unter einerley Benennung bringet, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten schreibet. So werdet ihr finden, daß $x^{n:m} \pm y^{r:s} = x^{ns/ms} \pm y^{mr/ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} \pm \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Anmerkung.

49. Auf eben diese Art könnet ihr mit den irrational-Zahlen verfahren. Z. E. Ihr sollt $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt{3}$ unter

unter eine Benennung bringen. Weil $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ und $\sqrt[6]{3} = 3^{1:2}$, so findet ihr $5^{1:3} \pm 3^{1:2} = 5^{2:6} \pm 3^{3:6} = \sqrt[6]{5^2 \pm 3^3} =$ (wenn ihr die Gröſſen unter dem Wurzelzeichen wirklich zu ihren Dignitäten erhebt) $\sqrt[6]{25 \pm 27}$.

Die 6. Aufgabe.

50. Irrational-Gröſſen auf eine kürzere Art auszudrücken.

Auflöſung.

Weil $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x^{m:m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$ (§ 42); ſo

1. Dividiret die Gröſſe unter dem Wurzel-Zeichen durch eine Dignität von dem Grade, welcher einerley Exponenten mit der Wurzel hat, als durch einen Cubum, wenn die irrational = Gröſſe eine cubic-Wurzel iſt. Denn, wenn dergleichen Division nicht angehet, ſo könnet ihr auch die irrational = Gröſſe nicht kürzer ausdrücken.
2. Den Quotienten laſſet unter dem Wurzel-Zeichen.
3. Vor das Wurzel-Zeichen aber ſetzt die Wurzel der Dignität, wodurch ihr dividiret.

So iſt geſchehen, was man verlangte.

Exem

Exempel.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}. & \text{Ingleichen} \\ \sqrt{18} &= \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}. & \text{Wiederum} \\ \sqrt[4]{48} &= \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}.\end{aligned}$$

Der 1. Zusatz.

51. Wenn ihr die irrational-Größen von einerley Art solchergestalt reduciret, und es bleibt unter dem Wurzel-Zeichen einerley Größe stehen; so verhalten sie sich gegen einander, wie die rational-Größen vor dem Wurzel-Zeichen. Z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. Derowegen ist $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$ (§. 75 *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

52. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufsaabe finden, ob zwei irrational-Größen eine Verhältniß gegen einander haben, welche sich durch rational-Größen ausdrücken läßet, z. E. daß $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$ (§. 51).

Der 3. Zusatz.

53. Weil ihr in solchergestalt reducirten irrational-Größen den Theil, welcher irrational bleibt, für den Namen der Einheit mit Recht haltet (§. 5 & *seqq Arithm.*); so könnet ihr die Summe oder den Unterschied der irrational-Größen finden, welche unter
dem

dem Wurzel-Zeichen einerley Gröſſen haben, und von einerley Art ſind, wenn ihr die rational-Gröſſen vor dem Wurzel-Zeichen zuſammen addiret oder von einander ſubtrahiret. So werdet ihr finden, daß $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Ingleichen $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} + \sqrt[3]{3 \cdot 27} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zuſatz.

54. Wenn ihr die Gröſſen, welche zum Theil rational, zum Theil irrational ſind, gang irrational machen ſollt; ſo müſſet ihr die Gröſſe vor dem Wurzel Zeichen zu der Dignität erheben, welche der Exponent über dem Wurzel-Zeichen andeutet, und durch ſelbige die Gröſſe unter dem Wurzel-Zeichen multipliciren. So werdet ihr finden, daß $5\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{50}$ und $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{3 \cdot 125} = \sqrt[3]{375}$.

Die 1. Anmerkung.

55. Damit ihr erfahret, ob eine vorgegebene Zahl ſich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren läſſet, oder nicht, ſo dürfet ihr ſie nur in diejenigen Zahlen zergliedern, durch deren Multiplication ſie entſtehet. Dieſes aber geſchiehet, wenn ihr ſie mit den einzelnen Zahlen zu dividiren anfanget. Z. E. Ihr ſollt auf ſolche Weiſe 368 zergliedern, ſo findet ihr:

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) 368 2. 184

2	184
4	92
8	46
16	28

Die 2. Anmerkung.

56. Wenn die irrational-Rechnungen anfangs verdrüsslich fallen, der kan sie so lange überschlagen, bis sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß, daß er nicht für unnütze Grüßen halte, wovon er den Nutzen nicht bald sehen kan. Ihr werdet in dem folgenden erfahren, daß ich niemals eine Lehre vortrage, welche nicht ihren gewissen Nutzen hat.

Die 7. Aufgabe.

57. Eine irrational-Größe durch eine andere von einerley Art zumultipliciren.

Auflösung

Weil $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[m]{b^r} = b^{r:m}$ (§. 42);
so ist $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^r} = a^{n:m} b^{r:m}$ (§. 20) $= \sqrt[m]{a^n b^r}$ (§. 45.) und erhellet hieraus folgende Regel:

1. Multipliciret die Größen unter dem Wurzel-Zeichen (a^n und b^r) durcheinander.
2. Vor das Product setzet das Wurzel-Zeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{}$).

So

So werdet ihr finden, daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$,
und $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

58. Wenn ihr also eine irrational-Zahl durch eine andere irrational-Zahl dividiren sollet, so dürfet ihr nur die Zahlen unter dem Wurzel-Zeichen durch einander dividiren. So werdet ihr finden, daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

59. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekannten Größen von den unbekannten, und benennet jene mit den ersten, diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 5). Wenn die Benennung geschehen ist, so
2. Suchet eine Gleichung, daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen belegt: denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (§. 27 Arithm.). Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekannte Größen habt. Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zeichen,

chen, daß ihr die eine unbekannte Grösse so groß annehmen könnet, als ihr wollet. Und pflegt man dergleichen Aufgaben undeeterminirte Aufgaben zu nennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müßet sie aus ihren Umständen durch Hülfe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.

3. Wenn in den Gleichungen bekannte und unbekannte Grössen mit einander vermenget sind, so müßet ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekannte, auf der andern aber nur eine unbekannte stehen bleibt: Welches geschiehet, wenn ihr die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren; welche addiret sind, durch subtrahiren; welche andere multipliciren, durch dividiren; welche andere dividiren, durch multipliciren wegbringet: oder auch die Wurkeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurkeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30, 31, 32, 33 *Arithm.* & §. 36 *Algebr.*).

Anmerkung.

60. Unerachtet die Einrichtung der gefundenen Gleichung sehr oft auf beschriebene Weise geschehen kan; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel bekant machen, ehe wir zu andern schreiten. Denn die Algebra lernet man nicht so wohl durch Regeln, als durch Exempel.

Die

Die 9. Aufgabe.

61. Aus der gegebenen Summe zweyer Gröſſen und ihrem Unterscheide die Gröſſen ſelber zu finden.

Auſlösung.

Es ſey die Summe $= a$, die kleine Gröſſe $= x$, der Unterscheid $= b$, die groſſe $= y$.

So iſt

$$\begin{array}{rcl} x + y = a & (\S. 15 \text{ Arithm.}) & y - x = b \quad (\S. 18 \text{ Arithm.}) \\ x & \text{subtr.} & x & \text{add.} \\ \hline y = a - x & & y = b + x \end{array}$$

demnach

$$\begin{array}{rcl} a - x = b + x & (\S. 28 \text{ Arithm.}) & \\ x & \text{add.} & \\ \hline a = b + 2x & & \\ b & \text{subtr.} & \\ \hline a - b = 2x & & \\ \hline a - b = x, & 2 \text{ div.} & \\ \hline x & & \end{array}$$

Folglich iſt die gröſſere $y = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b + b = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$.

Regel.

Zieh den Unterscheid der beyden Gröſſen

Ö 9 9 9 3

ſen

sen (b) von der Summe (a) ab. Den Rest dividiret durch zwey; so ist der Quotient die kleine Gröſſe (x). Addiret den Unterschied zu der Summe; so ist die Helfte davon die große Gröſſe (y).

Z. E. Es sey $a=30$, $b=8$, so ist $(a-b):2 = (30-8):2 = 22:2 = 11$, und $(a+b):2 = (30+8):2 = 38:2 = 19$.

Probe.

Den $19-11=8$, und $19+11=30$.

Oder allgemein:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ \hline \text{Summe } a, \quad \text{Untersch. } b. \end{array}$$

Anmerkung.

62. Ihr könnet jederzeit aus der letzten Gleichung eine Regel machen, durch welche die Aufgabe in allen vorkommenden Fällen aufgelöset werden kan, wenn ihr vor die Buchstaben die Namen der Sachen sehet, welche sie bedeuten, und anstatt der Zeichen die Rechnungs-Arten benennet, welche sie andeuten: allein der Kürze halber werde ich ins künftige keine Regel hersehen, wenn es nicht besondere Umstände erfordern. Und dieses thue ich um so viel lieber, weil man die Exempel in Zahlen viel hurtiger auflösen kan, wenn man die Ziffern in die Stelle der Buchstaben sehet, als wenn man nach der Regel verfährt. Auch ist zu merken, daß öfters in den Gleichungen, in welchen noch bekantes und unbekantes mit einander vermengt ist, nützliche Lehrsätze enthalten sind. Z. E. Aus der Gleichung $a-b=2x$ erhellet folgender Lehrsatz:

Wenn man von der Summe zweier Gröſſen

Größen ihren Unterschied abziehet; so ist der Rest zweymal so groß als die kleinere.

Die 10. Aufgabe.

63. Eine Zahl zu finden, deren Helfte, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen, um 1 größer sind als die Zahl selbst.

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist,

$$x + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$$

$$= 12x + 8x + 6x$$

$$= \frac{26}{24}x \quad (\S. 82 \text{ Arithm.})$$

$$= x + \frac{1}{12}x \quad (\S. 78, 80 \text{ Arithm.})$$

$$1 = \frac{1}{12}x$$

12 mult.

$$12 = x.$$

Probe $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13$.

Es ist demnach nichts mehr als die einzige Zahl 12, welche diese Eigenschaft hat.

Die 11. Aufgabe.

64. Aus der gegebenen Summe zweier Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung

Es sey die Summe $= a$, die halbe Differenz $= x$;
das Product $= b$,
so

§ 99 99 4

so ist die große Zahl $\frac{1}{2}a + x$ $\left[\begin{array}{l} \text{die kleine } \frac{1}{2}a - x \end{array} \right.$ §. 61.

Und also $\frac{1}{4}aa - xx = b$ (§. 32.)
 $xx \quad xx \quad \text{add.}$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}aa = b + xx \\ b \quad b \quad \text{subtr.} \\ \hline \frac{1}{4}aa - b = xx \\ \hline \text{rad. extr.} \end{array}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)} = x.$$

Also ist die große Zahl $\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)}$;
 die kleine $\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)}$.

Es sey $a=14$, $b=48$, so ist $\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)}$
 $= \sqrt{(49 - 48)} = 1$, folglich die große
 Zahl $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$, und die kleine $\frac{1}{2}a$
 $- x = 7 - 1 = 6$

Probe. Denn $8+6=14$ und $6.8=48$.

Anmerkung.

65. Es ist an der Benennung öfters viel gelegen.
 Denn, wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die große
 Zahl x , die kleine y nennet: so kommet ihr auf eine
 Gleichung, welche ihr noch nicht aufzulösen vermö-
 gend seyd. Mercket dabey den Lehrsatz, welchen die
 Gleichung $\frac{1}{4}aa = b + xx$ an die Hand giebt:

Das Quadrat der halben Summe
 zweier Gröffen ist gleich dem Producte
 derselben in einander und dem Quadrate
 des halben Unterscheides.

Die 12. Aufgabe.

66. Es wird gegeben die Summe glei-
 cher Dignitäten zweier Gröffen, und der
 Unter-

Unterscheid selbiger Dignitäten, ihr sollt
die Gröſſen ſelbſt finden.

Auſlöſung.

Es ſey die Summe $= a$, die kleine Gröſſe $= x$,
der Unterſcheid $= b$, die große $= y$;

ſo iſt

$$\frac{x^m + y^m = a}{y^m = a - x^m} \quad \frac{y^m - x^m = b}{y^m = b + x^m}$$

ſolglich

$$\frac{a - x^m = b + x^m}{a = b + 2x^m}$$

$$\frac{a - b = 2x^m}{(a - b) : 2 = x^m}$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)} = x.$$

Es ſey $m=2$, $a=97$, $b=65$; ſo iſt $x=$
 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)} = \sqrt{48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$,
und $y = \sqrt{b + x^2} = \sqrt{65 + 16} = \sqrt{81} = 9$.

Probe: Denn $81 + 16 = 97$ und $81 -$
 $16 = 65$.

Die 13. Aufgabe.

67. Zwei Zahlen von der Beſchaffen-
heit zu finden, daß das Product einer je-
den in die Quadrat-Wurzel der andern
einer gegebenen Zahl gleich iſt.

699995

Auf-

Auflösung.

Es sey das eine Product $= a$ die eine Zahl $= x$
das andere $= b$, die andere $= y$;

$$\begin{array}{rcl} \text{So ist } x \sqrt{y} = a & & y \sqrt{x} = b \\ \hline x^2 y = a^2 & & y^2 x = b^2 \\ \hline & & x = b^2 : y^2 \\ \hline & & x^2 = b^4 : y^4. \end{array}$$

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Linken $x^2 y$ sehet, so bekommet ihr

$$\begin{array}{rcl} b^4 y : y^4 = b^4 : y^3 = a^2 & & \\ \hline & & y^3 \text{ mult.} \\ b^4 = a^2 y^3 & & \\ \hline b^4 : a^2 = y^3 & & \\ \hline \sqrt[3]{(b^4 : a^2)} = y. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Es sey } a=18, b=12, \text{ so ist } y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)} \\ = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ und } x = b^2 \\ : y^2 = 144 : 16 = 9. \end{array}$$

Probe: Denn $9 \cdot 2 = 18$, und $4 \cdot 3 = 12$.

Die 14. Aufgabe.

68. Aus der gegebenen Summe zweier Gröſſen und der Differenz ihrer Quadrate, die beyden Gröſſen zu finden.

Auf:

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die halbe Differenz
die Differenz der der Gröſſen $=y$,
Quadr. $=b$;

So iſt die eine Gröſſe $\frac{1}{2}a+y$ (§. 61).
Die andere $\frac{1}{2}a-y$

Das Quadrat der erſtern $\frac{1}{4}aa+ay+yy$,

Das Quadr. der andern $\frac{1}{4}aa-ay+yy$,

Die Differenz $b = 2ay$

$2a$

folglich $b:2a=y$.

Es ſey $b=40$, $a=10$; ſo iſt $y=40:20=$
 2 ; folglich die eine Zahl $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$,
die andere $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Probe: Denn $7+3=10$, und $49-9=40$.

Die 15. Aufgabe.

69. Aus der gegebenen Summe zweier
Gröſſen und der Summe ihrer Quadra-
te, die beyden Gröſſen zu finden.

Auflösung.

Es ſey die erſte Summe $=a$, die eine Gröſſe
 $\frac{1}{2}a+y$ (§. 61).

Die andere $=b$, die andere $\frac{1}{2}a-y$

So iſt das Quadrat der erſtern $\frac{1}{4}aa+ay+yy$
der andern $\frac{1}{4}aa-ay+yy$

Die Summe $b = \frac{1}{2}aa + 2yy$.

Folg.

$$\begin{array}{r} \text{Folglich} \quad b - \frac{1}{2}aa = 2yy \\ \hline \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa = yy \\ \hline \sqrt{\left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa\right)} = y. \end{array}$$

Es sey $a=10$, $b=58$, so ist $\sqrt{\left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa\right)} = \sqrt{(29-25)} = \sqrt{4} = 2$: folglich $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$, und $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Probe: Denn $7+3=10$, und $49+9=58$.

Die 16. Aufgabe.

70. Two Zahlen zu finden, deren Product einer gegebenen Zahl gleich ist, das Quadrat aber der Summe zu dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen eine gegebene Verhältniß hat.

Auflösung.

Es sey das Product $=a$, die Summe $=2x$, die gegebene Verhältniß $=b:c$, der Unterschied $=2y$,

so ist die eine Zahl $x+y$,
die andere $x-y$,

und also

$$xx-yy=a \quad b:c=4x^2:y^2=x^3:y^2 (\S. 75 \text{ Arithm.})$$

$$xx=a+y^2 \quad by^2=cx^2 (\S. 109 \text{ Arithm.})$$

$$by^2:c=x^2.$$

Folgt

$$\begin{array}{r}
 \text{Folglich} \\
 a + y^2 = by^2 : c \\
 \hline
 ac + cy^2 = by^2 \\
 \hline
 ac = by^2 - cy^2 \\
 \hline
 \hline
 ac = (b - c)y^2 \quad b - c \text{ div.} \\
 \hline
 ac : (b - c) = y^2 \\
 \hline
 \sqrt{ac} : \sqrt{b - c} = y.
 \end{array}$$

Es sey $a = 96$, $b : c = 25 : 1$, so ist $y = \sqrt{96} : \sqrt{25 - 1} = \sqrt{4}$ (§. 58) $= 2$; und $x = \sqrt{(a + y^2)} = \sqrt{96 + 4} = \sqrt{100} = 10$: folglich $x + y = 10 + 2 = 12$, und $x - y = 10 - 2 = 8$.
 Probe: $12^2 = 96$, und $25 : 1 = 400 : 16$.

Die 17. Aufgabe.

71. Aus der gegebenen Tage-Reise zweener Bothen und der Zeit, in welcher der andere dem erstern nachgeheth, die Zeit zu finden, in welcher er ihn einholet.

Auflösung.

Es sey die Tage-Reise des erstern $= a$, die gesuchte Zeit $= x$,
 des andern $= b$,
 die gegebene Zeit $= c$.

So ist die Reise des erstern in der gegebenen Zeit $= ac$, in der gesuchten $= ax$. Die Reise des andern in der letztern Zeit $= bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurückgelegt haben; so ist

ac

Es sey $a=6$, $b=4$, $c=12$; so ist $x=\frac{24}{12} \div 6=2 \div 6=8$.

Probe: Denn $24 \div 72=96$ u. $8 \cdot 12=96$

Die 19. Aufgabe.

74. Aus der gegebenen Weite zweener Oerter von einander, aus welchen zu gleicher Zeit zween Boten ausreisen, und der Tage-Reise eines jeden, die Zeit zube-
stimmen, in welcher sie einander begegnen.

Auflösung.

Es sey die Weite $=a$, die gesuchte Zeit $=x$,
die Tage-Reise des erstern $=b$,
des andern $=c$.

So ist der Weg des erstern in der zube-
stimmenden Zeit $=bx$, des andern $=cx$; folg-
lich, weil beyde zusammen die ganze Wei-
te der Oerter von einander durchreiset,

$$bx + cx = a$$

$$\text{das ist } (b + c)x = a$$

$$x = a : (b + c).$$

Es sey $a=120$, $b=6$, $c=4$; so ist $x=120:$
 $(6+4)=120:10=12$. Sie begegnen also
einander in dem zwölften Tage.

Probe: Denn $6 \cdot 12 + 4 \cdot 12 = 72 + 48 = 120$.

Die 20. Aufgabe.

75. Aus dem gegebenen Werthe einer
Kanne guten Weins, zube-
stimmen, wie
viel man Wasser darunter mischen muß,
damit man das Maas um einen verlang-
ten geringern Preis geben kan.

Auf-

Auflösung.

Der höhere Preis sey $=a$, das Wasser $=x$,
 der geringere $=b$,

das Kannen-Maas $=1$.

Da nun der Preis von $1=b$, so ist der Preis
 von $1+x=b+bx$ (§. 113 Arithm.): und da-
 her, weil das Wasser x nichts gilt,
 $b+bx=a$ (§. 28 Arithm.)

$$bx = a - b$$

$$x = (a - b) : b$$

Es sey $a=16$, $b=10$; so ist $x=(16-10):$
 $10=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Probe: Denn wenn $1\frac{3}{5}$ Kannen 16 Gro-
 schen kommen; so kommt eine Kanne 10
 Groschen (§. 113 Arithm.).

Die 21. Aufgabe.

76. Aus dem gegebenen Preise zweener
 Weine von verschiedener Güte, zube-
 stimmen, wie viel man von dem geringern zu
 dem bessern gießen muß, damit man ihn
 vor einen verlangten Preis geben kan.

Auflösung.

Es sey der Preis des die Grösse des schlech-
 guten $=a$, tern $=x$,
 des schlechtern $=b$; so ist sein Preis $=bx$,
 des vermischten $=c$, die Grösse des guten
 $=1-x$,
 das Kannenmaas $=1$, sein Preis $=a-ax$.
 Folg=

Folglich:

$$\begin{array}{r}
 a - ax \mp bx = c \quad (\text{I. 28 Arithm.}) \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 ax \quad ax \\
 a \mp bx = ax \mp c \\
 bx \quad bx \\
 \hline
 a = ax - bx \mp c \\
 c \quad c \\
 \hline
 a - c = ax - bx = (a - b)x \\
 \hline
 (a - c) : (a - b) = x.
 \end{array}
 \end{array}$$

Es sey $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; so ist $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Probe: Denn $\frac{1}{3}$ von dem guten kommt $5\frac{1}{3}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ von dem schlechten $6\frac{2}{3}$ Gr. folglich der vermischte 12 Gr.

Anmerkung.

77. Die auf besondere Arten der Fälle gerichtete Aufgaben sind schwerer aufzulösen, als die allgemeinen von Zahlen und Grössen. Denn, man hat hier viele besondere Umstände, welche zur Auflösung der Aufgabe nichts beytragen, und es ist öfters, sonderlich vor Anfänger, nicht eine geringe Mühe, wenn man die Aufgaben von den besondern und zur Auflösung nicht dienenden Umständen befreyen soll.

Die 6. Erklärung.

78. Wenn die Wurzel einer Dignität oder Potenz aus zween Theilen besteht, (Wolfs Mathes. Tom. IV.) $Hh \quad hh \quad so$

so nennet man sie eine binomische Wurzel, als $a + b$. Bestehet sie aus drey Theilen, als $a + b + c$; so heißt sie eine trinomische Wurzel: wenn sie aus vier Theilen beste-
het, eine quadrinomische Wurzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie eine poly-
nomische Wurzel, wenn sie aus mehr als zween Theilen besteht.

Die 22. Aufgabe.

79. Die Natur des Quadrats oder der andern Dignität einer binomischen Wur-
zel zu finden.

Auflösung.

Ihr verlangt zu wissen, wie das Qua-
drat einer binomischen Wurzel entstehen kan
(S. 4 Method. Mathem.). Multipliciret dem-
nach die binomische Wurzel $a + b$ durch sich
selbst, so wird das Product zeigen, aus was
vor Theilen das Quadrat zusammen gesetzt
wird, und wie diese Theile des Quadrats
aus den Theilen der Wurzel entstehen.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 + ab + b^2 \\
 a^2 + ab \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2 \text{ Quadrat der binomischen} \\
 \text{Wurzel.}
 \end{array}$$

Lehr:

Lehrsatz.

Das Quadrat der binomischen Wurzel begreift in sich die Quadrate der beyden Theile (a^2 und b^2) und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zweymal genommen ($2a$) in den andern (b).

Anmerkung.

80. Ihr habt hier auf eine sehr leichte Art den andern Lehrsatz der Rechenkunst (§. 93 *Arithm.*) gefunden, aus welchem wir die Ausziehung der Quadrats Wurzel (§. 97 *Arithm.*) hergeleitet haben. Wenn ihr aber dieselben Regeln vergessen hättet; so könnte euch dieses allgemeine Exempel $a^2 + 2ab + b^2$ an statt derselben dienen. Denn, ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Linken das darinnen befindliche Quadrat a^2 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel a habt. Wollt ihr nun den andern finden, so müßet ihr mit $2a$, das ist, mit dem gefundenen Quotienten, zweymal genommen, die folgende Zahl $2ab$ dividiren, und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore $2a$ in den neuen Quotienten b , sondern auch das Quadrat des neuen Quotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

81. Setzet $a = a + b$, und $b = c$, so kommt für das Quadrat der trinomischen Wurzel $(a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$. Und also müßet ihr zu dem binomischen Quadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der binomischen Wurzel, zweymal genommen, in den dritten Theil und das Quadrat des dritten Theils addiren. Setzet $a = a + b + c$, und $b = d$, so kommt für das Quadrat der quadrimomischen Wurzel $(a + b + c)^2 + 2$
 $2ab + 2ac + 2bc + d^2$ (a +

$(a \pm b \pm c) d \pm d^2$. Derowegen müßet ihr zu dem Quadrate der trinomischen Wurzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile, zweymal genommen, in den vierten Theil, und das Quadrat des vierten Theils addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Formul auch das Quadrat einer jeden polynomischen Wurzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Wurzel ziehen könnet. Denn, $(a \pm b \pm c \pm d \pm e \&c)^2 = a^2 \pm 2ab \pm b^2 \pm 2(a \pm b)c \pm c^2 \pm 2(a \pm b \pm c)d \pm d^2 \pm 2(a \pm b \pm c \pm d)e \pm e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die 7. Erklärung.

82. Eine unreine quadratische Gleichung (*Aequatio quadratica affecta*, wird genennet, in welcher $x^2 \pm ax = \pm b^2$.

Die 23. Aufgabe.

83 Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

Weil $x^2 \pm ax = \pm b^2$, so nehmet x für den einen Theil einer binomischen Wurzel an. Alsdenn wird a die bekannte Grösse des andern Gliedes, der andere Theil der Wurzel zweymal genommen, und also $\frac{1}{2}a$ der andere Theil der Wurzel seyn: folglich fehlet zu einem vollkommenen Quadrate das Quadrat von $\frac{1}{2}a$, nemlich $\frac{1}{4}aa$ (§. 79). Wenn ihr nun solches

solches beyderseits addiret; so läßt sich die Quadrat-Wurzel ausziehen, und die gegebene Gleichung völlig einrichten.

$$\begin{array}{r} \text{Es sey } x^2 + ax = b^2 \\ \quad \quad \quad \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2 \\ \hline x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \\ \hline x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} \\ \hline x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a. \end{array}$$

Es sey ferner :

$$\begin{array}{r} x^2 - ax = b^2 \\ \hline \text{so ist } x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \\ \hline x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} \\ \text{oder } \frac{1}{2}a - x \\ \hline \text{folglich } x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}. \end{array}$$

Denn, weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ grösser als $\frac{1}{2}a$ ist; so gehet die andre Wurzel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ nicht an.

Es sey endlich

$$\begin{array}{r} x^2 - ax = -b \\ \hline \text{so ist } x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2 \\ \hline x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} \\ \text{oder } \frac{1}{2}a - x \\ \hline x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}. \end{array}$$

§ h h h 3

Weil

Weil $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$ kleiner als $\frac{1}{2}a$ ist; so läßt es sich von $\frac{1}{2}a$ subtrahiren, und also gehen beyde Wurheln an.

Nemlich dieses findet statt, wenn man zwey unbekante Gröffen hat, und es gilt gleich viel, welche von beyden man x nennet, indem immer einerley Gleichungen heraus kommen.

Anmerckung.

84. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr ins künftige überflüssig sehen. Jetzt begnügt mich, dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zu erläutern.

Die 24. Aufgabe.

85. Two Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr Product, ihre Summe und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Auflösung.

$$\begin{array}{lcl} \text{Es sey die grössere Zahl} & = x, & \\ \text{die kleinere} & = y; \text{ so ist} & \\ x^2 - y^2 = xy, & xy = x + y & \\ \hline & xy - y = x & \\ \hline & y = x : (x - 1). & \end{array}$$

Wenn ihr den Werth y in der erstern Gleichung an seine Stelle sehet, so bekommt ihr, weil $y^2 = x^2 : (x - 1)^2$, und $xy = x^2 : (x - 1)$,

x^2

$$\begin{array}{r}
 x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x - 1} \\
 \hline
 x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2 \\
 x^4 - 3x^3 = -x^2 \\
 \hline
 x^2 \text{ div.} \\
 x^2 - 3x = -1 \\
 \frac{9}{4} \quad \frac{9}{4} \quad (\S. 83). \\
 \hline
 x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \\
 \hline
 x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \\
 \text{oder } \frac{3}{2} - x = \\
 \hline
 x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \\
 \text{oder } x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}.
 \end{array}$$

Ferner, weil $xy - x = y$, so ist $x = y : (y - 1)$.
 Wenn ihr diesen Werth in der erstern Gleichung in die Stelle x setzt, so bekommt ihr

$$\frac{y^2}{y^2 - 2y + 1} - y^2 = \frac{y^2}{y - 1}$$

und wenn ihr die Reduction, wie vorhin, anstellet, so findet ihr endlich $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$,
 oder $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

Weil $\frac{1}{2} \sqrt{5}$ grösser ist als $\frac{1}{2}$; so findet bloß die erstere Wurzel statt. Derowegen, weil diese allein mit $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$, nicht aber mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$; hingegen die falsche Wurzel $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$ mit

h h h h 4

mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ die Probe hält; so sind die verlangten Zahlen $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Probe: Denn $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$,
 ingleichen $\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 + \sqrt{5}$.
 Gleichergestalt ist $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 - \sqrt{5}$,
 und $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 - \sqrt{5}$,
 ingleichen $\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 - \sqrt{5}$.

Die 25. Aufgabe.

86. Aus dem gegebenen Producte zweier Gröſſen und ihrer Differenz die Gröſſen ſelber zuſinden.

Auſlösung.

Es ſey das Product $= a$, die größte Gröſſe $= x$,
 die Differenz $= b$, die andre $= y$;

So iſt :

$$\frac{a = xy}{a : y = x,} \quad \frac{b = x - y}{b + y = x.}$$

Folglich $a : y = b + y$

$$\begin{array}{r} \frac{a = by + y^2}{\frac{1}{4}b^2} \quad y \\ \frac{1}{4}b^2 \quad (\S. 83). \\ \hline a + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + by + y^2 \\ \hline \sqrt{a + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}b + y \\ \hline \sqrt{a + \frac{1}{4}b^2} - \frac{1}{2}b = y. \end{array}$$

Es

Es sey $a=40$, $b=3$, so ist $y=\sqrt{(40\pm\frac{9}{4})}$
 $-\frac{3}{2}=\sqrt{(169:4)}-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$,
 und demnach $x=8$.

Probe: Denn $5 \cdot 8=40$, und $8-5=3$.

Die 26. Aufgabe.

87. Die Natur der dritten Dignität einer Binomischen Wurzel zu finden.

Auflösung.

Ihr habt nur die andere Dignität,

$a^2 \pm 2ab \pm b^2$
 durch die Wurzel $a \pm b$ zu multipliciren
 (§. 32)

$$\begin{array}{r} \pm a^2b \pm 2ab^2 \pm b^3 \\ a^3 \pm 2a^2b \pm ab^2 \end{array}$$

so ist $a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$ die verlangte dritte Dignität (§. 78).

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer binomischen Wurzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Product aus dem Quadrate des ersten Theiles drey mal genommen ($3a^2$) in den andern (b), nebst noch einem andern Producte aus dem ersten Theile drey mal genommen ($3a$) in das Quadrat des andern Theils (b^2).

Die 1. Anmerkung.

88. Ihr habt hier abermal auf eine sehr leichte Art den 3. Lehrsatz der Rechenkunst (§. 99 *Arithm.*) gefunden, woraus die Ausziehung der Cubic-Wurzel hergeleitet worden ist (§. 103 *Arithm.*). Wenn ihr aber die dort gegebenen Regeln vergessen hättet, so könnte euch das allgemeine Exempel $a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$
 h h h h 5 an

an deren statt dienen. Denn ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Linken die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel a habt. Wenn ihr nun aus den übrigen Gliedern den andern Theil finden wollet, so müßet ihr das erste zur Linken $3a^2b$ durch das Quadrat des ersten drey mal genommen ($3a^2$) dividiren, und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisore ($3a^2$) in den neuen Quotienten (b), sondern das Product aus dem Quadrate des neuen Quotienten (b^2) in den vorhergehenden drey mal genommen ($3a$), und endlich die dritte Dignität des neuen Quotienten (b^3) abziehen.

Zusatz.

89. Sehet $a = a + b$, und $b = c$, so kommt für die dritte Dignität der trinomischen Wurzel $a + b + c$ heraus $(a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$, und also müßet ihr zu der Dignität der binomischen Wurzel noch das Product aus dem Quadrate der binomischen Wurzel drey mal genommen $3(a + b)^2$ in den dritten Theil c , das Product aus der binomischen Wurzel drey mal genommen $3(a + b)$ in das Quadrat des dritten Theils c^2 , und die dritte Dignität desselben Theils c^3 addiren. Sehet $a = a + b + c$, und $b = d$, so ist die dritte Dignität der quadrimischen Wurzel $(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$; folglich müßet ihr noch zu der Dignität der trinomischen Wurzel $(a + b + c)^3$ das Product aus dem Quadrate der trinomischen Wurzel drey mal genommen $3(a + b + c)^2$ in den vierten Theil d , das Product aus

der

der trinomischen Wurzel dreymal genommen $3(a+b+c)$ in das Quadrat des vierten Theils d^2 , und die dritte Dignität des vierten Theils d^3 addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden polynomischen Wurzel finden, inaleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Cubic-Wurzel ziehen könnet. Denn $(a+b+c+d+e \&c.)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 + 3(a+b+c+d)^2e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3$ u. s. w. unendlich fort.

Die 2. Anmerkung.

90. Auf eben solche Weise könnet ihr für die höhern Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde, wie ihr an statt unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten, zu welchen eine Grösse erhoben werden kan, eine einige finden könnet; so wird euch die Mühe doch nicht verdriessen, wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierten, fünften, sechsten Dignität u. s. w. untersucht. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen, die allgemeine Regel zuerfinden.

Die 27. Aufgabe.

91. Eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher jede binomische Wurzel zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kan.

Auflösung.

Wenn ihr die binomische Wurzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Tafel ausweist.

so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzt ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multiplicirt werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn ihr jeden Theil der Wurzel zu allen niedrigeren Dignitäten als die gegebene ist, erhebet, und sie verkehrt in einander multipliciret. Z. E. in der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1$. und $1b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Multipliciret die erstere Reihe in die andere, so bekommet ihr $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität besteht, außer denen Zahlen, welche sie multipliciren, und nach dem Exempel des Oughtred (Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von denen Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen, wenn der Exponent m ist, so sind die Producte $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Un- 1 + 1
gen. 1 + 2 + 1
1 + 3 + 3 + 1
1 + 4 + 6 + 4 + 1
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1
&c.

wer-

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, welche in einander multiplicirt werden, unter einander schreibt, und den Bruch aus den zwei ersten Zahlen für die Unke des andern Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten obern und beyden ersten untern Zahlen zur Unke des dritten Gliedes nehmet *2c.* *3. E.* Es sollen die Unken für die sechste Dignität gefunden werden: so schreibt die angeführten Exponenten dergestalt unter einander:

$$\begin{array}{cccccc}
 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. \\
 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6.
 \end{array}$$

Als denn ist $\frac{6}{1} = 6$ die Unke des andern Gliedes,
 $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ die Unke des dritten, $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$, die Unke des vierten, $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$
 die Unke des fünften, $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$ die
 Unke des sechsten, und endlich $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$ die Unke des letzten Gliedes.

Auf eben solche Art werden die Unken gefunden, wenn die Exponenten undeterminirt sind. Man schreibt sie nemlich dergestalt unter einander:

m.

$$\frac{m. m-1. m-2. m-3. m-4. m-5. \text{rc.}}{1. 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6}$$
 und nimt $\frac{m}{1}$ für die Unze des andern
 Gliedes; $\frac{m. m-1}{1}$ für die Unze des dritten,
 $\frac{m. m-1. m-2}{1. 2.}$ für die Unze des vierten,
 $\frac{m. m-1. m-2. m-3}{1. 2. \quad 3.}$ für die Unze des fünften
 $\frac{m. m-1. m-2. m-3. m-4}{1. 2. \quad 3. \quad 4.}$ für die Unze
 des sechsten, $\frac{m. m-1. m-2. m-3. m-4. m-5}{1. 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.}$
 für die Unze des siebenden &c.

Wenn ihr nun diese Uncias in die oben gefundenen Producte multipliciret; so bekommt ihr für die Dignität m von $a \pm b$.

$$\frac{a^m \pm m a^{m-1} b \pm m. m-1 a^{m-2} b^2 \pm m. m-1. m-2 a^{m-3} b^3 \pm m. m-1. m-2. m-3 a^{m-4} b^4 \pm m. m-1. m-2. m-3. m-4 a^{m-5} b^5 \pm m. m-1. m-2. m-3. m-4. m-5 a^{m-6} b^6 \&c.}{1. \quad 1. 2. \quad 1. 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6.}$$

Das

Das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$,
 $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$ &c. (§. 39),

$$\begin{array}{r}
 a^m + \frac{ma^mb}{1a} + \frac{m(m-1)a^mb^2}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^mb^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^mb^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} a^mb^5 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6} a^mb^6 \text{ \&c.} \\
 \hline
 \end{array}$$

Wenn ihr nun ferner $a = P$ und $b : a = Q$,
das erste Glied $= A$, das andere $= B$, das
dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$
u. s. w. sehet; so findet ihr endlich $(P + PQ)^m$
 $= P^m + m AQ + \frac{m(m-1)}{1.2} BQ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} CQ +$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} DQ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} EQ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6} FQ \text{ u. s. w.}$$

unendlich fort.

Also habt ihr eine allgemeine Regel ge-
funden, nach welcher ihr eine jede binomi-
sche Wurzel zu einer jeden verlangten Di-
gnität erheben könnet.

Die 1. Anmerkung.

92. Ihr verlangt die vierte Dignität von 18 oder

10 + 8, so ist $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8 : 10 = 4 : 5$, folglich $P^m = 10^4 = 10000 = A$.

$$m. \quad A Q = 4. 10000. \frac{4}{5} = 32000 = B$$

$$m - 1 B Q = \frac{3}{2}. 32000. \frac{4}{5} = 38400 = C$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ m - 2 C Q = \frac{2}{3}. 38400. \frac{4}{5} = 20480 = D \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ m - 3 D Q = \frac{1}{4}. 20480. \frac{4}{5} = 4096 = E \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ m - 4 E Q = 0. 4096. \frac{4}{5} = 0 = F \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 10000 = A \\ 32000 = B \\ 38400 = C \\ 20480 = D \\ 4096 = E \\ \hline \end{array}$$

104976 vierte Dignität von 18.

Die 2. Anmerkung.

93. Ihr werdet vielleicht meinen, daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche Multipliciren die gegebenen Zahlen zu der verlangten Dignität erheben kan, und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütz halten. Allein, ihr solltet zu seiner Zeit erfahren, wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen habt, wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspühren werdet. Jetzt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel ziehen solltet; so könnet ihr die Regeln nach welchen solches geschiehet, wie für die quadrat- und cubic-
(Wolffs Mathef. Tom. IV.) Sit ii Wurzel

Wurzel (§. 80, 88) finden, wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel die binomische Wurzel $a \pm b$ zu der gehörigen Dignität erhebet. 3. E. Ihr sollet die Wurzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen; so dürfet ihr nur $a \pm b$ zu der fünften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel wird euch die Regel bald an die Hand geben.

Die 3. Anmerkung.

94. Gleichwie ihr aber schon oben gesehen habt, daß die Regeln für die binomischen Wurzeln auch dienen, eine polynomische Wurzel zu der andern und dritten Dignität zu erheben (§. 81, 89); also gehet es auch an, daß ihr nach dieser allgemeinen Regel, welche zwar eigentlich auch nur auf binomische Wurzeln gerichtet ist, auf eine gleiche Weise eine jede polynomische Wurzel zu der verlangten Dignität erhebet, und die Wurzel selbst nach derselben findet: wie aus folgender Aufgabe zu sehen ist.

Die 28. Aufgabe.

95. Eine allgemeine Regel zu finden, aus allen Dignitäten eine verlangte binomische Wurzel zu ziehen.

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 42); so ist das Wurzel-Ausziehen so viel, als eine Grösse zu einer Dignität erheben, welche zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Dero wegen, wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel anstatt des Exponenten m den Exponenten $m:n$ setzet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher so wohl jede Grösse zu einer verlangten Dignität erhoben, als
aus

aus derselben eine verlangte Wurzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende:

$$\sqrt[n]{(P \pm PQ)^m} = P^{m:n} \pm \frac{m}{n} A Q \pm \frac{m-m}{n} B Q \\ \pm \frac{m-2n}{3n} C Q \pm \frac{m-3n}{4n} D Q \pm \frac{m-4n}{5n} E Q \\ \pm \frac{m-5n}{6n} F Q \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Die 1. Anmerkung.

96. Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland, *Isaac Newton*, zuerst gefunden, wiewohl auf eine andere Art, als ich gewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet, welchen er An. 1676 an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorum, den Herrn Reichshofrath von Leibniz, geschrieben, und *Wallisus* mit in den dritten Theil seiner mathematischen Werke f. 622. hat drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Denn, wie ihr $m:n$ durch ganze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklären könnet, wenn ihr $n=1$ sezet: so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären, wenn eine Wurzel ausgezogen werden soll. Z. E. Ihr sezet $m=\frac{1}{2}$, wenn ihr die quadrat-Wurzel verlangt; $m=\frac{1}{3}$, wenn ihr die cubic-Wurzel suchet u. s. w.

Die 2. Anmerkung.

97. Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget: so will ich selbigem mit einem Exempel erläutern. Ihr verlangt zu wissen die quadrat-Wurzel aus $aa - x^2$: so ist $m=1$, $n=2$, $P=a^2$, $Q=-x^2:a^2$, folglich:

Jii ii 2

Pm

$$Pm:n=a=A$$

$$\pm \frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}a - x^2 : a^2 = - \frac{x^2}{2a} = B$$

$$\pm \frac{m-n}{2n}BQ = 1 - 2 \frac{-x^2}{4} - \frac{x^2}{2a} = - \frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$\pm \frac{m-2n}{3n}CQ = 1 - 4 \frac{-x^4}{6} - \frac{x^2}{8a^3} = - \frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$\pm \frac{m-3n}{4n}DQ = 1 - 6 \frac{-x^6}{8} - \frac{x^2}{16a^5} = - \frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$\pm \frac{m-4n}{5n}EQ = 1 - 8 \frac{-5x^8}{10} - \frac{x^2}{128a^7} = - \frac{7x^{10}}{256a^9} \&c.$$

$$\text{Demnach ist } \sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$$

$$- \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Die 3. Anmerkung.

98. Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkommene Wurzel haben kan, so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden ist, so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimt aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist, bis nemlich durch Weglassung der übrigen kein mercklicher Fehler entsteht.

Die 4. Anmerkung.

99. Wenn einem die 27. und 28. Aufgabe zu schwer vorkommen sollte, der kan sie so lange bey Seite setzen, bis wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die

Die 29. Aufgabe.

100. Die Differenz zweyer Quadrate zu finden, derer Wurzeln um 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel n , die andere $n+1$,
so ist das Quadrat der größern $n^2 + 2n + 1$,
der kleinern n^2

die Differenz $2n + 1$.

Wenn nun jede Zahl, zweymal genommen, eine gerade Zahl bringet, und eine gerade Zahl von einer ungeraden um 1 unterschieden ist; so ist die Differenz zweyer Quadrate, derer Wurzeln um 1 unterschieden sind, eine ungerade Zahl, welche der Summe der Wurzeln gleich ist. Es seyn die Wurzeln 8 und 9, so ist die Differenz ihrer Quadrate $17 = 8 + 9$.

Der 1. Zusatz.

101. Also kan man durch bloße Addition die quadrat-Zahlen aller Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung finden. Man darf nemlich nur zu dem vorhergehenden Quadrate beständig seine und zugleich die folgende Wurzel addiren.

Der 2. Zusatz.

102. Die quadrat-Zahlen werden auch
Zii ii 3
in

in ihrer Ordnung nach einander gefunden,
wenn man die ungeraden Zahlen in ihrer
Ordnung zu einander addiret.

Wurzeln.	ungerade Zahlen.	quad. Zahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die 30. Aufgabe.

103. Den Unterschied zweier cubice
Zahlen zu finden, deren Wurzeln um 1
von einander unterschieden sind.

Auflösung

Es sey die eine Wurzel $= n$, die andere $n+1$;

so ist

die grössere cubie-Zahl $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

die kleinere n^3

der Unterschied $3n^2 + 3n + 1$.

Daß

Das ist, $n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + n = (n + 1)^2 + 2n^2 + n$. Also ist der verlangte Unterschied die Summe aus dem Quadrate der größern Wurzel und dem Quadrate der kleinern zwey mal genommen, und der kleinern Wurzel.
 3. E. Es seyn die Wurzeln 8 und 9; so ist der Unterschied ihrer cubic-Zahlen $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2 \cdot 8^2 + 8$.

Setzet ferner die dritte Wurzel $n + 2$; so ist die cubic-Zahl

	$n^3 + 6n^2 + 12n + 8$
Die vorige	$n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
	<hr/>
Der Unterschied	$3n^2 + 9n + 7$
Der erste Untersch.	$3n^2 + 3n + 1$
	<hr/>
Der andere Untersch.	$6n + 6 = 6(n + 1)$

Also ist der andere Unterschied zwey cubic-Zahlen die Wurzel der kleinern 6 mal genommen.

Zusatz.

104. Wenn man also die quadrat-Zahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden hat (§. 101, 102); so kan man daraus die cubic-Zahlen durch bloße Addition finden aus dem ersten Unterschiede. Oder, wenn man die cubic-Zahlen ohne die quadrat-Zahlen finden will; so addirt man erstlich den anderen Unterschied 1. 6. 12. 18. 24. 30 &c. um den erstern zu finden, und darnach den erstern Unter-

Die Summe und Differenz sind ungerade Zahlen, das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses läßt sich halbiren, jene nicht.

Die 32. Aufgabe.

106. Zu finden, was vor eine Zahl heraus kommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addirt, oder sie von einander subtrahirt, oder auch durch einander multiplicirt.

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$, die andere $2y$. So ist die Summe $2x+2y$, die Differenz $2x-2y$, das Product $4xy$: und also sind alle drey gerade Zahlen, denn sie lassen sich halbiren.

Die 33. Aufgabe.

107. Zu finden, was vor Zahlen heraus kommen, wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x+1$, die andere $2y+1$.

$2x+1$	$2x+1$
$2y+1$	$2y+1$
<hr/>	<hr/>
Summe= $2x+2y+2$	Differ.= $2x-2y$
Zii ii 5	2x

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 2y + 1 \\
 \hline
 + 2x + 1 \\
 4xy + 2y
 \end{array}$$

Product = $4xy + 2x + 2y + 1$.

Die Summe und Differenz lassen sich halbiren, sind also gerade Zahlen. Das Product läßt sich nicht halbiren; ist also eine ungerade Zahl.

Die 34. Aufgabe.

108. Zufinden, was vor Zahlen heraus kommen, wenn ihr lauter gerade Zahlen, oder eine gerade Anzahl ungerader Zahlen, oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.

Auflösung.

Es seyn die gerade Zahlen $2x$, $2y$, $2z$, $2t$ u. s. w. so ist die Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w. das ist $2(x + y + z + t \text{ u. s. w.})$ also eine gerade Zahl. Derowegen die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x + 1$, $2y + 1$, $2z + 1$, $2t + 1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w. $+ 2m$, das ist $2(x + y + z + t \text{ u. s. w.}) + 2m$, folglich eine gerade Zahl. Derowegen
wenn

wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addirt werden, so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermals $2x+1, 2y+1, 2z+1, 2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m+1$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m+1$, das ist, $2(x+y+z+t \text{ u. s. w.}) + 2m+1$, folglich eine ungerade Zahl. Derowegen, wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addirt werden, so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerkung.

109. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten, so sollten sie euch doch angenehm seyn, weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet auch bey andern Gelegenheiten ihren Nutzen verspühren. Z. E. wenn einer verlange, ihr soltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen; so werdet ihr bald sehen, daß dieses unmöglich sey, weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen, wenn sie summirt werden.

Die 35. Aufgabe.

110. Zufinden, was vor eine Dignität herauskommt, wenn man eine quadrat- oder cubic-Zahl durch sich selbst multiplicirt.

Auflösung.

Es sey die quadrat-Zahl x^2 , die cubic-Zahl x^3 . Multipliciret jede durch sich selbst, so kommt in dem erstern Falle x^4 , in dem andern x^6 .
Weil

Weil der Exponent 4 sich durch 2, der Exponent 6 aber so wohl durch 2 als durch 3 sich dividiren läßt; so ist x^4 ein Quadrat, x^6 aber zugleich eine quadrat- und eine cubic-Zahl. Derowegen, wenn eine quadrat-Zahl durch sich selbst multiplicirt wird, so ist das Product eine vierte Dignität und quadrat-Zahl: Wenn eine cubic-Zahl durch sich selbst multiplicirt wird, so ist das Product zugleich eine quadrat- und auch eine cubic-Zahl.

Anmerkung.

III. Auf diese Manier könnet ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrsätze finden, wenn ihr dieselben nöthig habt.

Die 36. Aufgabe.

112. Zu finden, wie groß in einer arithmetischen Progression die Summe der beyden äußersten Glieder sey.

Auflösung.

Es sey das erstere Glied a , der Unterscheid der Glieder d , so ist die Progression (S. 69 Arithm.).

$$\begin{array}{r}
 a.a+d. \quad a+2d. \quad a+3d. \quad a+4d. \quad a+5d \\
 \hline
 a+4d \qquad \qquad a+2d \qquad \qquad a \\
 \hline
 2a+5d = 2a+5d = 2a+5d \\
 \\
 a.a+d. \quad a+2d. \quad a+3d. \quad a+4d \\
 \hline
 a+3d. \quad \quad 2 \quad \quad a \\
 \hline
 2a+4d = 2a+4d = 2a+4d.
 \end{array}$$

Lehr:

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progression ist die Summe der beyden äußersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich, welche von den äußersten gleich weit abstehen, ingleichen zweymal so groß als das mittlere, wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Z. E.} & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 \\ & & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & & 24 & 24 & 24 & 24. \end{array}$$

Der 1. Zusatz.

113. Derwegen bekommt ihr die Summe der ganzen Progression, wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multipliciret. Es sey das erste Glied a , die Differenz d , die Zahl der Glieder n , so ist das letzte Glied $a + (n-1)d$, folglich die Summe der Progression $(2a + (n-1)d) \frac{1}{2}n = an + (n^2 - n) \frac{1}{2}d$. Es sey z. E. $a=3$, $n=7$, $d=3$, so ist die Summe der Progression $21 + (49-7) \frac{1}{2} \cdot 3 = 21 + 42. \frac{1}{2} = 21 + 21. 3 = 21 + 63 = 84$.

Der 2. Zusatz.

114. Ihr könnet demnach die Summe einer arithmetischen Progression finden, wenn
euch

euch das erste Glied, der Unterscheid und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Der 3. Zusatz.

115. Es sey $a=1$, $d=2$, die Zahl der Glieder $=n$; so ist die Summe der Progression $n+n^2-n=n^2$: woraus von neuem erhellet, daß die quadrat-Zahlen herauskommen, wenn man die ungeraden Zahlen, das ist, die Glieder in der arithmetischen Progression 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. zusammen addirt.

Der 4. Zusatz.

116. Es sey $a=\frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied sey dem halben Unterscheide der Glieder gleich; so ist die Summe der Progression $an+n^2-an=an^2$.

Der 5. Zusatz.

117. Es sey $a=n=\frac{1}{2}d$ das ist, das erste Glied, die Zahl und der halbe Unterschied der Glieder sind einander gleich; so ist die Summe $n^2+n^3-n^2=n^3$, das ist der Cubus von dem ersten Gliede. Z. E. $a=n=\frac{1}{2}d=8$, oder die Progression 8, 24, 40, 56, 72, 88, 104, 120; so ist die Summe 512 oder die cubic-Zahl von 8.

Anmerkung.

118. Hieraus erhellet, wie man aus allgemeinen Lehrsätzen besondere finden kan.

Die

Die 37. Aufgabe.

119. Aus dem ersten und letzten Gliede einer arithmetischen Progression und dem Unterscheide der Glieder, ihre Zahl und die Summe der Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, die Zahl der Glieder $= x$,
das letzte $= b$, die Summe $= y$,
der Unterscheid $= d$;

So ist (§. 113)

$$b = a + dx - d \quad y = \frac{1}{2}(b + a)x$$

$$\frac{b - a + d = dx}{d} = \frac{(b + a)(b - a) + \frac{1}{2}(b + a)}{2d}$$

$$\frac{b - a + d}{d} = x = \frac{b^2 - a^2}{2d} + \frac{b + a}{2}$$

Es sey z. E. $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$, so ist
 $x = (17 - 2) : 3 + 1 = 15 : 3 + 1 = 6$, und
 $y = \frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = 19\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2}$
 $= 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

Probe: Denn $a + dx - d = 2 + 3 \cdot 6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$, und $\frac{1}{2}(b + a)x = \frac{6}{2}(17 + 2) = 3 \cdot 19 = 57$.

Die 38. Aufgabe.

120. Aus dem ersten Gliede, dem Unterscheide der Glieder, und der Summe einer arithmetischen Progression, die Zahl der Glieder und das letzte Glied zu finden.

Aufs

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, die Zahl der
 Glieder $= x$,
 der Unterschied $= d$, das letzte Glied
 $= y$,

die Summe $= c$;

So ist (§. 113)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x(a+y) &= c & a+x-d &= y \\ \hline ax+xy &= 2c \\ \hline xy &= 2c-ax \\ \hline y &= (2c-ax):x, \text{ folglich:} \\ (2c-ax):x &= a+x-d \\ \hline 2c-ax &= dx^2+ax-dx \\ \hline 2c:d &= x^2+\frac{(2a-d)x}{d} \end{aligned}$$

Setzet $(2a-d):d = m$, so ist

$$2c:d = x^2+mx$$

$$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2 \quad (\S. 83)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}m^2+2c:d &= x^2+mx+\frac{1}{4}m^2 \\ \hline \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+2c:d\right)} &= x+\frac{1}{2}m \\ \hline \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+2c:d\right)}-\frac{1}{2}m &= x. \end{aligned}$$

Oder

$$\text{Oder } x = \sqrt{\frac{4a^2 - 4ad + d^2 + 2c}{4d^2}} - \frac{2a + d}{2d}$$

folglich

$$y = \sqrt{2cd + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2} - \frac{1}{2}d$$

$$= \sqrt{2cd + (a - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{1}{2}d.$$

Es sey $a=2$, $d=3$, $c=57$, so ist $m=(4-3):$
 $3=\frac{1}{3}$, folglich $x=\sqrt{(\frac{1}{36}+\frac{114}{3})}-\frac{1}{6}=\sqrt{13\frac{69}{36}}-$
 $\frac{1}{6}=\sqrt{3\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}=\sqrt{3\frac{6}{6}}=6$. Ferner ist $y=\sqrt{(342$
 $+ \frac{1}{4})}-1\frac{1}{2}=18\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}=17$.

Probe: Denn $(2+17) 3=3$. $19=57$,
 und $2+3 \cdot 6-3=2+18-3=17$.

Die 39. Aufgabe.

121. Aus dem ersten und letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progression, die Zahl und den Unterschied der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, die Zahl der Glieder $=x$,
 das letzte $=b$, der Unterschied $=y$,
 die Summe $=c$.

So ist (§. 113.)

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{2}(a+b) & = & c \\ x(a+b) & = & 2c \\ x & = & 2c:(a+b) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a+xy-y & = & b \\ xy-y & = & b-a \\ xy & = & b+y-a \\ x & = & (b+y-a):y. \end{array}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) R E E E E Folg.

Folglich:

$$\begin{array}{r}
 2c : (a + b) = (b + y - a) : y \\
 \hline
 2cy : (a + b) = b + y - a \quad y \\
 \hline
 2cy = ab + ay - a^2 + b^2 + by - ab \quad a + b \\
 \hline
 2cy - ay - by = b^2 - a^2 \\
 \hline
 y = (b^2 - a^2) : (2c - a - b)
 \end{array}$$

Es sey $a=2, b=17, c=19$, so ist $x=114$:
 $(2+17)=114:19=6$, und $y=(289-4):$
 $(114-19)=285:95=3$.

Probe: Denn $3(2+17)=3 \cdot 19=57$,
 und $2+3 \cdot 6=2+18=20=17$, wie vor-
 hin (§. 120).

Die 40. Aufgabe.

122. Aus dem Unterscheide und der
 Zahl der Glieder, ingleichen der Summe
 einer arithmetischen Progression, das
 erste und letzte Glied, und folglich alle
 übrigen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $=n$, das erste
 Glied $=x$,
 der Unterscheid $=d$, das letzte $=y$,
 die Summe $=c$.
 So ist (§. 113.)

$$\frac{1}{2}n$$

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2}n(x+y) & = & c \\
 \hline
 n(x+y) & = & 2c \\
 \hline
 x+y & = & 2c:n \\
 \hline
 y & = & 2c:n-x. \quad \text{Folglich:} \\
 2c:n-x & = & x+nd-d \\
 \hline
 2c:n+d-nd & = & 2x \\
 \hline
 c:n+\frac{1}{2}(d-nd) & = & x. \\
 \text{Es sey } n=6, d=3, c=57, \text{ so ist } x & = & \\
 \frac{57+3}{6} - \frac{18}{2} = \frac{57+9}{6} - \frac{9}{6} = \frac{66}{6} - \frac{9}{6} = \frac{11}{1} - \frac{9}{6} \\
 = 2, \text{ und } y = \frac{114}{6} - 2 = 19 - 2 = 17.
 \end{array}$$

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 41. Aufgabe.

123. Aus dem Unterscheide der Glieder, dem letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progression, das erste Glied und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das letzte Glied $=b$, das erste Glied $=x$,
 der Unterscheid $=d$, die Zahl der Glieder $=y$,
 die Summe $=c$.
 Kkkk 2 So

So ist (§. 113.)

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}y(x+b) & = & c \\ \hline y(x+b) & = & 2c \\ \hline x+b & = & 2c:y. \\ \hline x & = & 2c-b, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} b & = & x+dy-d \\ \hline b+d-dy & = & x. \end{array}$$

Somit:

$$\begin{array}{rcl} 2c-b & = & b+d-dy \\ \hline 2c-by & = & by+dy-dy^2 \\ \hline dy^2-2by-dy & = & -2c \\ \hline y^2-(2b+d)y & = & -2c:d. \end{array}$$

Setzet $(2b+d):d=m$, so ist

$$\begin{array}{rcl} y^2-my & = & -2c:d \\ \frac{1}{4}m^2 & & \frac{1}{4}m^2 \text{ (§. 83.)} \\ \hline y^2-my+\frac{1}{4}m^2 & = & \frac{1}{4}m^2-2c:d \\ \hline \frac{1}{2}m-y \text{ oder } y-\frac{1}{2}m & = & \sqrt{(\frac{1}{4}m^2-2c:d)} \\ \hline y & = & \frac{1}{2}m+\sqrt{(\frac{1}{4}m^2-2c:d)} \\ y & = & \frac{2b+d}{2d}+\sqrt{\frac{4b^2+4bd+d^2-8cd}{4d^2}} \\ \hline & = & \frac{2b+d}{2d}+\sqrt{4b^2+4bd+d^2-8cd} \end{array}$$

Folgt

Folglich :

$$x = b + d - b - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$$

$$= \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$$

$$\text{Es ist aber } 4b^2 + 4bd + d^2 = (2b + d)^2.$$

$$\text{Es sey } b=17, d=3, c=57, \text{ so ist } 2b + d = 34 + 3 = 37, \text{ folglich } y = 37 - \sqrt{(1369 - 1368)} = 37 - 1 = 36 = 6, \text{ und } x = \frac{3}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 42. Aufgabe.

124. Aus der Summe einer arithmetischen Progression, der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte, die Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$, das erste Glied $= x$, die Zahl der Glieder $= n$, das letzte $= y$, die Summe $= c$.

So ist

$$\frac{1}{2}n(x + y) = c \text{ (§. 113.)} \quad a = xy$$

$$\frac{n(x + y)}{2} = 2c \quad a : x = y.$$

$$\frac{x + y}{2} = 2c : n$$

$$y = \frac{2c - x}{n}$$

Reet 3

Folg

Folglich:

$$\begin{array}{r}
 a : x = 2c : n - x \\
 \hline
 a = 2cx - x^2 \\
 \hline
 x^2 \\
 n \\
 \hline
 x^2 - 2cx = -a \\
 \hline
 a \\
 n \\
 \hline
 c^2 : n^2 \quad c^2 : n^2 \\
 \hline
 x^2 - 2cx \mp c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a \\
 \hline
 n \\
 \hline
 c x = \sqrt{(c^2 - a)} \\
 \mp \phantom{= \sqrt{(c^2 - a)}} \\
 \phantom{= \sqrt{(c^2 - a)}} n^2 \\
 \hline
 c \sqrt{(c^2 - a)} = x. \\
 \mp \phantom{= \sqrt{(c^2 - a)}} \\
 \phantom{= \sqrt{(c^2 - a)}} n n^2
 \end{array}$$

Nemlich wenn man das Zeichen — braucht, so bekommt man x ; wenn man das Zeichen \mp brauchet, bekommt man y .

Es sey $c=57$, $n=6$, $a=34$, so ist $x=$

$$\frac{57}{6} - \sqrt{\frac{3249}{36} - 34} = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{3249 - 1224}{36}}$$

$$= \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{2025}{36}} = \frac{57}{6} - \frac{45}{6} = \frac{12}{6} = 2, \text{ und}$$
hingegen $y = \frac{57}{6} + \frac{45}{6} = \frac{102}{6} = 17.$

Probe:

Probe: Denn $\frac{6}{2}(2+17)=3 \cdot 19=57$,
und $2 \cdot 17=34$.

Die 8. Erklärung.

125. Wenn man etliche Glieder von einer arithmetischen Progression, welche sich von 1 anfängt, zu einander addiret; so heißt die Summe eine polygonal-Zahl (Numerus Polygonus).

Die 9. Erklärung.

126. Insbesondere heißt es eine triangular-Zahl, wenn die Differenz der Glieder in der Progression 1 ist; eine quadrat-Zahl, wenn sie 2 ist; eine pentagonal-Zahl, wenn sie 3 ist; eine hexagonal-Zahl, wenn sie 4 ist; u. s. w.

Arithm. Progr.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Triang. Zahlen	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36
Arithm. Progr.	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
Quadr. Zahlen	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64
Arithm. Progr.	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
pentagonal-Zahl	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92
Arithm. Progr.	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29
hexagonal-Zahl	1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120.

Anmerkung.

127. Ihr werdet ins künftige erfahren, daß es nicht ohne Nutzen sey, wenn man allerhand Progressionen der Zahlen summiren lernt. Zu dem Ende wollen wir auch untersuchen, wie man die polygonal-Zahlen summiren kan.

Die 10. Erklärung.

128. Die Seite der polygonal-Zahl heißt die Zahl der Glieder, welche von der Progression sind summirt worden, damit dieselbe entstanden ist.

Anmerkung.

129. Die polygonal-Zahlen haben ihren Namen von den regulären Figuren, in welche sich die Einheiten, woraus sie bestehen, versetzen lassen. Es kommen aber in die Seite der Figur jederzeit so viel Einheiten oder Punkte (durch welche sie angedeutet werden) als Glieder von der Progression summirt worden sind, damit man die polygonal-Zahl bekomme.

Die 11. Erklärung.

130. Durch die Zahl der Winkel verstehen wir diejenige, welche andeutet, wie viel Winkel die Figur hat, von welcher die polygonal-Zahl ihren Namen bekommt.

Der 1. Zusatz.

131. Also ist die Zahl der Winkel in trigonal-Zahlen 3; in quadrat- oder tetragonal-Zahlen 4; in pentagonal-Zahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz.

132. Da nun in trigonal-Zahlen der Unterschied der Glieder 1, in quadrat-Zahlen 2, in pentagonal-Zahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winkel jederzeit um 2 grösser als der Unterschied der Glieder in der Progression, durch deren Summierung die polygonal-Zahlen entstehen. Die

Die 43. Aufgabe.

133. Aus der gegebenen Seite einer polygonal-Zahl und der Zahl der Winkel die polygonal-Zahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seite $=a$,
 Die Zahl der Winkel $=n$,
 das erste Glied der Progr. ist $=1$ (§. 125)
 der Unterschied der Glieder $=n-2$ (§. 132)
 das letzte Glied $1+(n-2)(a-1)$ (§. 113)
 $=an-2a-n+3$
 das erste Glied $=1$.

Summe des ersten und letzten $an-2a-n+4$
 halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}a$ (§. 128).
 polygonal-Zahl $\frac{1}{2}a^2n-a^2-\frac{1}{2}an+2a$ (§. 113)
 $=a^2n-2a^2-an+4a=(n-2)a^2-a(n-4)$

$\frac{2}{2}$
 Es sey $n=3$, so ist die trigonal-Zahl=
 $1a^2+1a$.

$\frac{2}{2}$
 Es sey $n=4$, so ist die tetragonal-Zahl=
 $2a^2-0a=a^2$.

$\frac{3}{2}$
 Es sey $n=5$, so ist die pentagonal-Zahl=
 $3a^2-1a$.

2

REEE 5

Es

Es sey $n=6$, so ist die heragonal-Zahl=
 $\frac{4a^2 - 2a}{2} = 2a^2 - a,$

$\frac{2}{2}$
 Es sey $n=7$, so ist die heptagonal-Zahl=
 $\frac{5a^2 - 3a}{2}.$

$\frac{2}{2}$
 Es sey $n=8$, so ist die octogonal-Zahl=
 $\frac{6a^2 - 4a}{2} = 3a^2 - 2a$ u. s. w. unendlich fort.

$\frac{2}{2}$
 Nämlich die um zwey verminderte Zahl
 der Winkel wird durch das Quadrat der
 Seite und die um 4 verminderte Zahl der
 Winkel durch die Seite der polygonal-Zahl
 multiplicirt; das letztere Product aber von
 dem erstern abgezogen, und der Rest durch
 zwey dividirt.

Exempel.

Ihr sollt die sechste trigonal-Zahl finden.
 Weil $a=6$; so ist $\frac{a^2 + a}{2} = \frac{36 + 6}{2} = 18$

$+ 3 = 21$. Wenn ihr die achte pentagonal-Zahl
 suchet; so ist $a=8$, und also $\frac{3a^2 - a}{2} =$

$\frac{3 \cdot 64 - 8}{2} = \frac{192 - 8}{2} = 97$. Wenn

$\frac{2}{2}$
 ihr die fünfte heragonal-Zahl suchet, so ist
 $a=5$, und also $2a^2 - a = 50 - 5 = 45$.

Die

Die 44. Aufgabe.

134. Aus der gegebenen polygonal-Zahl und der Zahl der Winkel die Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey die polygonal-Zahl $= p$, die Seite $= x$,
die Zahl der Winkel $= n$.

So ist der Unterschied der Glieder $n-2$ (§. 132)

das erste Glied 1 (§. 125)

Derowegen das letzte $1 + (x-1)(n-2)$

(§. 113, 128),

das ist $3 + nx - 2x - n$

das erste Glied 1 ,

Summe des ersten und letzten $4 + nx - 2x - n$

halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 128)

$$2x + \frac{1}{2}nx^2 - x^2 - \frac{1}{2}nx.$$

Derowegen ist:

$$\frac{1}{2}nx^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}nx = p$$

$$\frac{nx^2 - 2x^2 - nx + 4x = 2p}{2}$$

$$nx^2 - 2x^2 - nx + 4x = 2p$$

$$\frac{nx^2 - 2x^2 - nx + 4x = 2p}{n-2}$$

$$x^2 - \left(\frac{n+4}{n-2} \right) x = \frac{2p}{n-2}.$$

Das ist, wenn $(n-4):(n-2)=m$

$$x^2 -$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - mx = 2p : (n-2) \\
 \frac{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}m^2} \\
 \hline
 x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2) \\
 \hline
 x - \frac{1}{2}m = \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2)} \\
 \hline
 x = \frac{1}{2}m + \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2)\right)}.
 \end{array}$$

Das ist, wenn man vor m seinen Werth
setzt,

$$\begin{array}{r}
 x = \frac{n-4}{2n-4} + \sqrt{\left(\frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16} + \frac{4p}{2n-4}\right)} = \\
 \frac{n-4 + \sqrt{(8p(n-2) + (n-4)^2)}}{2n-4}
 \end{array}$$

$$\text{Es sey } n=3; \text{ so ist } x = \frac{2n-4}{2n-4} + \sqrt{(8p+1)}.$$

$$\text{Es sey } n=4; \text{ so ist } x = \frac{2}{2} + \sqrt{(16p+0)}.$$

$$\text{Es sey } n=5; \text{ so ist } x = \frac{4}{4} + \sqrt{(24p+1)}.$$

$$\text{Es sey } n=6; \text{ so ist } x = \frac{6}{6} + \sqrt{(32p+4)}.$$

$$\text{Es sey } n=7; \text{ so ist } x = \frac{8}{8} + \sqrt{(40p+9)}.$$

$$\text{Es sey } n=8; \text{ so ist } x = \frac{10}{10} + \sqrt{(48p+16)}.$$

$$\text{u. s. w. unendlich fort.} \quad 12$$

Wenn

Wenn ihr diese polygonal-Zahlen betrach-
tet, so werdet ihr wahrnehmen, 1) daß
überall die Zahl außer dem Wurzel-Zeichen,
die um 4 verringerte Zahl der Winkel; und
2) daß die andere Zahl unter dem Wurzel-
Zeichen das Quadrat von dieser Zahl sey;
3) die erste aber dem Producte aus der po-
lygonal-Zahl in den Divisorem 4 mal genom-
men, gleiche, und 4) der Divisor die Sum-
me der Zahl außer dem Wurzel-Zeichen
und der Zahl der Winkel ausmache.

Es sey 21 eine trigonal-Zahl: ihr sollt die
Seite finden, das ist, die wie vielte sie in
ihrer Ordnung ist. Weil $p=21$, so ist die
verlangte Seite $\frac{-1 \pm \sqrt{168 \pm 1}}{2} =$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} = \frac{12}{2} = 6. \text{ Es sey}$$

$p=45$ und zwar eine hexagonal-Zahl; so ist
die verlangte Seite $\frac{2 \pm \sqrt{32 \cdot 45 \pm 4}}{8} =$

$$\frac{2 \pm \sqrt{1444}}{8} = \frac{2 \pm 38}{8} = \frac{40}{8} = 5.$$

Zusatz.

135. Wenn ihr also nach und nach eine
gegebene Zahl in die Stelle von p sezet; so
werdet ihr sehen, ob sie mit unter die poly-
gonal-Zahlen gehöre, und in welche Reihe
dersel-

derselben sie zusehen sey. Denn sie findet in allen Reihen statt, wo für ihre Seite eine ganze rational-Zahl heraus kommt. Also, wenn euch 21 wäre gegeben worden, so würdet ihr gefunden haben, daß es die sechste trigonal-Zahl sey.

Anmerkung.

136. Ihr dürft aber nicht weiter versuchen, ob die gegebene Zahl sich für p setzen lasse, wenn ihr die Zahl der Winkel gleich wird, als in dem gegebenen Exempel 21.

Die 45. Aufgabe.

137. Die Größe des Products der beyden äußersten Glieder in einer geometrischen Proportion zu determiniren.

Auflösung.

Es sey in dem erstern Falle, wenn nur 3 Glieder sind, das erste $=a$, der Exponent $=m$, so ist die Proportion

$$\begin{array}{ccc} \div a. & ma. & m^2a \\ & \underline{ma} & \underline{a} \end{array} \quad (\S. 66, 68 \text{ Arithm.})$$

$$(ma)^2 = m^2a^2 \quad (\S. 88 \text{ Arithm.}).$$

Es sey in dem andern Falle, wenn 4 Glieder sind, das erste $=a$, der Exponent $=m$, das dritte $=b$, so ist die Proportion

$$a : ma = b : mb \quad (\S. 66 \text{ Arithm.})$$

$$\begin{array}{ccc} & b & a \\ & \underline{b} & \underline{a} \\ mab & = & mab. \end{array}$$

Lehr.

Lehrsatz.

Wenn drey Gröſſen einander geometriſch proportional ſind, ſo iſt das Product der beyden äußerſten dem Quadrate der mittlern gleich: ſind aber vier einander proportional, ſo iſt das Product der äußerſten dem Producte der beyden mittlern gleich.

Anmerkung.

138. Von den Zahlen iſt dieſes ſchon in der Rechen:Kunſt erwieſen worden (§. 109, 110 *Arithm.*). Wir haben aber in der Geometrie ſolches mit Recht auch auf die Linien, Flächen und Körper gedeutet, indem man alle Gröſſen als undeterminirte Zahlen anſehen kan (§ 9); welches nun durch gegenwärtige algebraiſche Rechnung noch mehr gerechtfertigt wird.

Die 46. Aufgabe.

139. Drey geometriſch proportional-Gröſſen zuſinden, aus dem gegebenen Producte des Quadrats der dritten in die erſte und dem Exponenten.

Auſlösung.

Es ſey das Product $=a$, die erſte Gröſſe $=x$,
der Exponent $=m$, ſo iſt die andere
 $=mx$.
die dritte $=m^2x$.

$$\begin{array}{l} \text{Folglich: } a = m^4 x^3 \\ \hline a : m^4 = x^3 \\ \hline \sqrt[3]{a : m^4} = x. \end{array}$$

Es

sind die vier proportional-Zahlen $3 : 6 = 5 : 10$.

Probe: Denn $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 30$ (§. 137).

Die 48. Aufgabe.

141. Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer geometrischen Proportion von 3 Gliedern, die Glieder selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$, das erste Glied $= x$,
der Exponent $= m$, das andere $= mx$,
das dritte $= m^2x$.

Folglich: $a = m^2x + x$ (§. 137)
 $\frac{a}{m^2 + 1} \text{ div.}$

$$a : (m^2 + 1) = x.$$

Es sey $a = 50$, $m = 2$, so ist $x = 50 : (4 + 1)$
 $= 50 : 5 = 10$, $mx = 20$, $m^2x = 40$.

Probe: Denn $10 \cdot 40 = 20 \cdot 20 = 400$
(§. 137).

Die 49. Aufgabe.

142. Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion versetzt werden können, damit sie einander proportional verbleiben.

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleiche ihre Summen, Unterscheide u. s. w. mit ihnen untereinander: so wer-
(Wolfs Mathes. Tom. IV.) El l l l det

det ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibt, wenn ihr nur acht gebet, ob in beyden Verhältnissen, welche mit einander verglichen werden, einerley Exponent ist (§. 65 *Arithm.*).

Es sey demnach $a : ma = b : mb$
 so ist 1. (*alternativum*) $a : b = ma : mb$
 2. (*inverse*) $ma : a = mb : b$
 3. (*conversionem*) $a + ma : a = b + mb : b$
 4. (*compositionem*) $a + ma : ma = b + mb : mb$
 5. (*divisionem*) $ma - a : a = mb - b : b$
 $ma - a : ma = mb - b : mb$.

Ferner
 oder überhaupt
 Ungleichungen

6. $a^2 : m^2 a^2 = b^2 : m^2 b^2$
 $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$
 7. $a : mac = b : mbc$
 8. $a : ma = b : mb$
 $\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c}$
 9. $ac : ma = bc : mb$
 10. $a : ma = b : mb$
 $\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c}$
 11. $ac : mac = b : mb$
 12. $a : ma = b : mb$
 $\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c}$
 13. $ac : mac = bd : mbd$
 14. $a : ma = b : mb$
 $\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{d} \quad \frac{\quad}{d}$
 15. $ac : mad = bc : mbd$
 16. $a : ma = b : mb$
 $\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{d} \quad \frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{d}$

Es

$$\begin{array}{ll}
 \text{Es sey } ordinate & a : ma = b : mb \\
 \text{und} & ma : mna = mb : mnb \\
 \text{so ist 17 ex æquo} & a : mna = b : mnb \\
 \text{es sey } perturbate & a : ma = b : mb \\
 \text{und} & ma : mna = b : b \\
 & \hline
 & n \\
 \text{so ist 18 ex æquo} & a : mna = b : mb. \\
 & \hline
 & n
 \end{array}$$

Anmerkung.

143. Hier habt ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden, welche ihr euch wohl bekant machen müßet, wenn ihr ins künftige entweder die mathematischen Schriften zulesen, oder auch durch eigenes Nachsinnen mathematische Wahrheiten heraus zubringen gedencket. Denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften. Der Beweis beruhet darauf, weil überall einerley Exponent für eine angegebene Proportion heraus kommt, als in dem 3 Lehrsätze ist $\frac{a}{a} \cdot \frac{ma}{ma} = 1 \cdot \frac{mb}{mb}$ und $\frac{b}{b} \cdot \frac{mb}{mb} = 1 \cdot \frac{ma}{ma}$; in dem siebzeh-

benden $\frac{a}{a} = 1$ und $\frac{b}{b} = 1$; in dem siebenzehenden

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{ma}{ma} & \frac{mb}{mb} & \frac{mna}{mna} & \frac{mnb}{mnb} \\
 a = 1 & b = 1 & &
 \end{array}$$

Ich halte es aber für unnöthig, die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern aus-
 zudrucken, weil ein jeder das für sich selbst thun
 kan, wenn er Lust darzu hat. Z. E. der 1 Lehrsatz lautet also: Wenn vier Grossen proportional sind, so verhält sich auch die
 1111 2 erste

erste zu der dritten, wie die andere zu der vierten. Der 11 wird so gegeben: Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und andere Glied durch eine GröÙe multipliciret; so bleiben auch die veränderten GröÙen den vorigen proportional.

Die 50. Aufgabe.

144. Zu finden, wie zwei GröÙen verändert werden können, daß doch ihre erste Verhältniß gegen einander unverändert bleibt.

Auflösung.

Es seyn zwei GröÙen a und ma , welche sich gegen einander verhalten wie 1 zu m ; so ist:

$$\begin{array}{ll}
 \text{I. } \begin{array}{l} a : ma \\ c \quad c \end{array} & \text{II. } \begin{array}{l} a : ma \\ c \quad c \end{array} \\
 \hline
 ac : mac = a : ma & \hline
 = 1 : m & \begin{array}{l} a : ma = a : ma = 1 : m \\ c \quad c \end{array} \\
 \\
 \text{III. } \begin{array}{l} a : ma \\ b : mb \end{array} & \\
 \hline
 a - b : ma - mb = a : ma = b : mb = 1 : m & \\
 \\
 \text{IV. } \begin{array}{l} a : ma \\ b : mb \end{array} & \\
 \hline
 a \pm b : ma \pm mb = a : ma = b : mb = 1 : m, &
 \end{array}$$

Lehr.

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwei Größen durch eine dritte multipliciret, so verhalten sich die Producte gegen einander, wie die multiplicirten Größen. 2. Wenn ihr zwei Größen durch eine dritte dividiret, so verhalten sich die Quotienten wie dieselben Größen. 3. Wenn sich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die ganze Größen, so verhalten sich auch die übrigen Theile wie die ganzen Größen. 4. Wenn die hinzugesetzten Größen sich verhalten wie die Größen, zu welchen sie addiret werden, so haben auch die Summen eben selbige Verhältniß.

Und dieses letztere gehet an, auch wenn vieler proportional-Größen förder- und hinder-Glieder zu einander addiret werden. Z. E. Es sey $a : m = b : n ; mb = c : n ; nc = d : m ; md = e : n ; ne$ &c. so ist $a + b + c + d + e$ &c. ; $ma + mb + mc + md + me$ &c. $= a : ma = 1 : m$.

Die 51. Aufgabe.

145. Die Größe des Products der beyden äußersten Glieder in einer geometrischen Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponent oder Mahle der Verhältniß $= m$, so ist die Progression.

2111 3

$a. ma$

$$\begin{array}{ccccccc} a & ma & m^2a & m^3a & m^4a & m^5a & m^6a \\ m^5a & m^4a & m^3a & m^2a & ma & a & \\ \hline m^6a^2 & = & m^6a^2 & = & m^6a^2 & = & m^6a^2. \end{array}$$

Lehrsatz.

In einer geometrischen Progression ist das Product der beyden äußersten Glieder dem Producte zweyer von den mittlern gleich, welche von den äußersten gleich weit abstehen, und dem Quadrate des mittlern, wenn sie an der Zahl ungleich sind. Und das letzte Glied in einer geometrischen Progression ist gleich dem Producte aus dem ersten Gliede in die Dignität des Exponenten, deren Grad um 1 weniger ist, als die Zahl der Glieder.

Die 52. Aufgabe.

146. Die Grösse des Quotienten zu determiniren, welcher heraus kommt, wenn der Unterschied der beyden äußersten Glieder durch den um 1 verringerten Exponenten dividirt wird.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponent $= m$, die Zahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$, der Unterschied des ersten und letzten $m^{n-1}a - a$. Dividiret denselben durch $m - 1$, so kommt heraus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ u. s. w. Wenn demnach n eine deter-

determinirte Zahl ist, z. E. 7, so ist $n-7=0$ und demnach $m^n-7=m^0=1$, folglich $m^n-7a=a$. Solchergestalt ist der Quotient die Summe aller Glieder weniger das letzte.

$$\begin{array}{r}
 m-1) \quad m^n-1a-a \\
 \quad \quad m^n-1a-m^n-2a \\
 \hline
 \quad \quad \quad +m^n-2a-a \\
 \quad \quad \quad +m^n-2a-m^n-3a \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad +m^n-3a-a \\
 \quad \quad \quad \quad \quad m^n-3a-m^n-4a \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad +m^n-4a-a \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad m^n-4a-m^n-5a \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad +m^n-5a-a \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad m^n-5a-m^n-6a \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad +m^n-6a-a. \text{ u. s. f.}
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} m^n-2a+m^n-3a+ \\ m^n-4a+m^n-5a \\ +m^n-6a \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

Zusatz.

147. Wenn ihr demnach den Unterscheid des ersten und letzten Gliedes in einer geometrischen Progression durch den um 1 verringerten Exponenten dividiret, und zu dem Quotienten das letzte Glied addiret; so habt ihr die Summe der ganzen Progression. Es sey das erste Glied a , der Exponent m , die Zahl der Glieder n , so

ist das letzte Glied $m^{n-1}a$. Und demnach die Summe der Progression $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, das ist, wenn $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, $128 + 127 : 1 = 255$. Wenn ihr alles zu einer Benennung bringet, so ist die Summe $(m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m - 1) = (m^n a - a) : (m - 1)$.

Die 53. Aufgabe.

148. Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede, mit der Zahl der Glieder in einer geometrischen Progression, den Exponenten zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponent $= x$,

das letzte $= b$,

die Zahl der Glieder $= n$.

So ist $b = x^{n-1}a$ (§. 145)

$$\frac{b : a = x^{n-1}}{b : a = x^{n-1}}$$

$$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x.$$

Es sey $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$, so ist $x = \sqrt[5]{486 : 2} = \sqrt[5]{243} = 3$.

Probe: Denn $3^5 \cdot 2 = 243 \cdot 2 = 486$.

Die 54. Aufgabe.

149. Aus dem gegebenen Exponenten, der Zahl der Glieder und der Summe der

der geometrischen Progression, das erste
Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey der Exponent $=m$, das erste Glied

die Zahl der Glieder $=n$; so ist das letzte
 $=m^{n-1}x$

die Summe $=c$. (§. 145)

Folglich:

$$c = (m^n x - x) : (m - 1)$$

$$m - 1$$

$$mc - c = m^n x - x$$

$$m^n - 1$$

$$(m - 1)c : (m^n - 1) = x.$$

Es sey $m=3$, $n=6$, $c=728$, so ist $x=2$.
 $728 : 728 = 2$.

Probe: Denn $(486 - 2) : 2 + 486 = 243$
 $- 1 + 486 = 242 + 486 = 728$.

Die 55. Aufgabe.

150. Aus dem ersten und letzten Gliede
und dem Exponenten, die Zahl der Glieder
in einer geometrischen Progression
zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, die Zahl der
Glieder $=x$,

das letzte $=b$,
der Exponent $=m$.

§ 111 5

So

Es ist $m^{x-1}a=b$, das ist, wenn ihr den Logarithmum von $a=la$ und den Logarithmum von $m=lm$ sehet,

$$\begin{array}{r} xlm - lm + la = lb \quad (\S. 23 \text{ Trig.}) \\ \hline xlm = lb - la + lm \\ \hline x = \frac{lb - la + 1}{lm} \end{array}$$

Es sey $n=2$, $b=486$, $m=3$, so ist

$$\begin{array}{r} lb = 2.6866363 \\ la = 0.3010300 \\ \hline lb - la = 2.3856063 \\ \quad \quad \quad \beta \ x \ x \\ lb - la = 23856063 \quad \left| \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array} \right. \\ lm = 4771212 \quad \quad \quad \hline 6 = x. \end{array}$$

Probe: Denn $2.243=486$ (§. 145).

Die 56. Aufgabe.

151. Eine unendliche Zahl Brüche zusammen, deren Zehler Eins ist, die Nenner aber in einer geometrischen Verhältniß fortgehen.

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Bruches = a , der Exponent = m . Weil die Brüche unendlich abnehmen, so muß der letzte so klein

klein werden, daß er, in Ansehung des ersten, für nichts zuhalten ist. Und also ist die Differenz des ersten und letzten Gliedes dem ersten gleich, das ist, $1 : a$, folglich die Summe $1 : a + 1 : (ma - a) = (m - 1 + 1) : (ma - a) = m : (m - 1) a$.

Es sey $m = 2$, so ist die Summe der Brüche $= 2 : a$, folglich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. w. unendlich fort $= 1$.

Es sey $m = 3$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 3 : 2a$, folglich $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. unendlich fort $= 3 : 6 = \frac{1}{2}$.

Es sey $m = 4$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 4 : 3a$, folglich $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $= 4 : 12 = \frac{1}{3}$.

Die 57. Aufgabe.

152. Die Summe unendlicher Brüche zu finden, deren gemeiner Zehler einer gegebenen Zahl gleich ist, die Nenner aber in einer geometrischen Progression fortgehen.

Auflösung.

Es sey der gemeine Zehler $= b$, der Exponent der Nenner in der Progression $= m$, der Nenner des ersten Bruchs $= a$, so ist der erste Bruch $= \frac{b}{a}$. Weil nun der letzte

Bruch aus der unendlichen Progression, in Ansehung des ersten, nichts ist, so ist der Unter

terscheid dieser beyden b , folglich die Summe

$$\frac{b + b}{a} = \frac{bm - b + b}{ma - a} = \frac{bm}{(m-1)a}.$$

Es sey $m=2$, $a=6$, $b=3$, so ist die Summe der Progression $=6:6=1$, das ist, $\frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{18}$ u. s. w. unendlich fort.

Eben so findet ihr, daß $\frac{5}{7} + \frac{5}{14} + \frac{5}{21}$ u. s. w. unendlich fort $=15:14=1\frac{1}{14}$.

Ingleichen findet ihr, daß $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ &c. $=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

Anmerkung.

153. Diese Aufgaben gehören in die Arithmetica infinitorum, welche *Johannes Wallisus* zuerst erfunden, und *Ismael Bullialdus* weiter ausgeführt hat: ich aber in meinen *Elementis Analyseos Infinitorum* zwar kurz, jedoch viel allgemeiner als beyde abgehandelt habe. Allein, weil man dieselbe nicht mehr sonderlich nöthig hat, nachdem der Herr von Leibnitz seine differential- und integral-Rechnung bekannt gemacht; so wollen wir uns auch mit derselben nicht aufhalten.

Die 12. Erklärung.

154. Drey oder vier Größen sind harmonisch proportional, wenn in dem ersten Falle der Unterscheid der ersten und andern sich verhält zu dem Unterscheide der andern und dritten, wie die erste zu der dritten: in dem andern Falle, wie der Unterscheid der ersten und andern zu dem Unterscheide der dritten und vierten, wie die

die erste zu der vierten. Vergleichen Zahlen sind 2, 3 und 6, denn $1:3=2:6$.

Die 13. Erklärung.

155. Wenn in dem erstern Falle die Glieder vervielfältiget werden; so entsteht eine harmonische Progression.

Die 58. Aufgabe.

156. Zu zwei gegebenen Grössen die dritte harmonische proportional-Grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die dritte $=x$,
die andere $=b$,

So ist (§. 154).

$$\begin{array}{r} b-a : x-b :: a : x \\ \hline ax-ab = bx-ax \quad (\S. 137). \\ \hline 2ax-bx = ab \\ \hline 2a-b \end{array}$$

$$ab : (2a-b) = x.$$

Es sey $a=10$, $b=16$; so ist $x=160:(20-16)=160:4=40$.

Probe: Denn $16-10:40-16=6:24=10:40=1:4$.

Der I. Zusatz.

157. Wenn $2a=b$; so ist $x=ab:0$, und also $1:0=x:ab$, folglich kan keine harmonische proportional-Grösse gefunden werden:

den: welches viel weniger angehet, wenn b grösser ist als $2a$.

Der 2. Zusatz.

158. Wenn man die dritte Grösse für die andere nimmt; so kan man auf gleiche Weise die vierte finden, und so weiter fort. Die Glieder einer harmonischen Progression

$$\begin{array}{cccc}
 a, b. & ab & ab & ab & ab \\
 \hline
 & 2a-b & 3a-2b & 4a-3b & 5a-4b \\
 & ab & ab & & \\
 \hline
 & 6a-5b & 7a-6b & \text{etc.} &
 \end{array}$$

Die 59. Aufgabe.

159. Zwischen zwei gegebenen Grössen die mittlere harmonische proportional-Grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die andere $=x$,
die dritte $=b$.

So ist (§. 154)

$$x-a:b-x=a:b$$

$$bx-ab=ab-ax \quad (\S. 137)$$

$$bx+ax=2ab$$

$$x=2ab:(a+b).$$

Es sey $a=10$, $b=403$; so ist $x=800:50=16$.

Probe:

Probe: Denn $16 - 10 : 40 - 16 = 6 : 24 = 10 : 40 = 1 : 4$, wie vorhin (§. 156).

Die 60. Aufgabe.

160. Zu drey gegebenen Gröſſen die vierte harmoniſche proportional-Gröſſe zu finden.

Auſlösung.

Es ſey die erſte $= a$, die vierte $= x$.

die andere $= b$,

die dritte $= c$,

So iſt (§. 154.)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac \quad (\S. 137)$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$ac = 2a - b$$

$$ac : (2a - b) = x.$$

Es ſey $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$, ſo iſt $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Probe: Denn $8 - 6 : 18 - 12 = 2 : 6 = 6 : 18 = 1 : 3$ (§. 154).

Anmerkung.

161. Nachdem wir den Nutzen der Algebra in arithmetiſchen Exempeln gezeigt haben; ſo iſt es Zeit, daß wir zu geometriſchen Aufgaben ſchreiten.

Die 61. Aufgabe.

162. Aus dem gegebenen Radio des Tab. I. Circuls ED die Seite des in ihm beſchriebenen regulären Drey-Ecks AB zu finden.

Auf.

Auflösung.

Es sey DB die Seite des Sechsecks.
Weil $DB=BE$ (§. 135 Geom.), und bey F rechte Winkel sind (§. 125 Geom.); so ist auch $DF=EF$ (§. 96 Geom.). Es sey demnach:

$$\begin{array}{rcl} DB=a, & BA=x. \\ \text{So ist } DF=\frac{1}{2}a & BF=\frac{1}{2}x. \\ \text{folglich } \frac{3}{4}aa=\frac{1}{4}xx & (\text{§. 172 Geom.}). \\ \hline & 4 \\ 3aa=xx & \\ \hline \sqrt{3aa}=x. & \end{array}$$

Tab. I.
Fig. 2.

Ihr findet demnach x , wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere proportional-Linie sucht (§. 210 Geom.). Besser aber geschieht es also: Aus A und B machet mit dem Diameter AB einen Durchschnitt in D, und ziehet aus dem Mittelpuncte C die Linie CD. Diese ist die Seite des Drey Eckes. Denn, da $DB^2=4a^2$, und $CB^2=a^2$, so ist $DC^2=3aa$ (§. 172 Geom. ; folglich $DC=\sqrt{3aa}$. Oder machet $AE=a$; so ist, wegen des rechten Winkels bey E (§. 115 Geom.), $EB=\sqrt{3aa}$ (§. 172 Geom.).

Der I. Zusatz.

Tab. I.
Fig. 1.

163. Weil $3aa=xx$, so ist $aa:xx=1:3$, das ist, $DE^2:AB^2=1:3$.

Der

Der 2. Zusatz.

164. Wenn die Seite des Drey-Ecks b Tab. I. gegeben ist, und ihr soltet den Radius des Circuls y finden, welcher um selbiges beschrieben werden kan; so habt ihr $3y^2 = b^2$, und also ist $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$: folglich dürfet ihr nur zwischen der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere proportional-Linie suchen (§. 210 Geom.).

Der 3. Zusatz.

165. Die halbe Seite AB, nemlich BF ist der Sinus des Bogens BD von 60° (§. 2 Trig.). Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. 11 Trigon. 112 Arithm.).

Die 62. Aufgabe.

166. Aus dem gegebenen Radio des Tab. I. Circuls AC die Seite des in ihm beschriebenen regulären Acht-Ecks zu finden.

Auflösung.

Es sey $AC = BC = DC = a$, $BD = x$; so ist $AB = \sqrt{2a^2}$ (§. 172 Geom.).

$BE = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$ (§. 125 Geom.) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ (§. 54).

$EC = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2}$ (§. 172 Geom.) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$,

$DE = a - \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$, folglich

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) $MMmm DE^2$

$$DE^2 = \frac{3}{2}a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$$

$$BE^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2} \text{ (§. 172 Geom.)}$$

$$DB = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2})}.$$

Zusatz.

167. Die halbe Seite des Acht-Ecks ist der Sinus des Bogens von $22^\circ 30'$ (§. 2 Trig.): diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 63. Aufgabe.

Tab. I.
Fig. 3.

168. Aus der gegebenen Seite des Acht-Ecks DB den Radius des Circuls AC zu finden, welcher um dasselbe beschrieben werden kan.

Auflösung.

Es sey $DB = b$, $BC = y$, so ist, vermöge dessen, was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden,

$$\begin{array}{r}
 b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\frac{1}{2}}y^2 \\
 \hline
 2y\sqrt{\frac{1}{2}}y^2 = 2y^2 - b^2 \\
 \hline
 2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4 \\
 \hline
 -b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2 \\
 \hline
 \\
 \hline
 -\frac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 \\
 \phantom{-\frac{1}{2}b^4} \\
 \hline
 \frac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4 \\
 \hline
 \sqrt{\frac{1}{2}b^4} = y^2 - b^2 \\
 \hline
 b^2 + \sqrt{\frac{1}{2}b^4} = y^2 \\
 \hline
 \sqrt{(b^2 + \sqrt{\frac{1}{2}b^4})} = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})} = y.
 \end{array}$$

Eine geometrische Construction hat man Tab. I. zwar nicht nöthig, weil sie aus den Anfangs-Gründen der Geometrie leichter zu haben ist. Doch kan man den Radium y und den Mittelpunct des Circuls aus dem gefundenen Werthe folgender Gestalt finden. 1) Theilet die Seite des Acht-Ecks AB in zween gleiche Theile in D , und beschreibet darüber einen halben Circul AFB ; so ist $AF = FB = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ (*§. 172 Geom.*). 2) Ziehet aus dem Mittelpuncte D durch F eine gerade Linie DC , welche auf AB perpendicular steht. 3) Machet $AE = 2AB + 2FB = 2b + 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, und beschreibet über AE einen halben Circul; so ist $AC = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})}$ oder der ver-
M m m m m 2 langte

langte Radius und in C der Mittelpunct des Circuls, welcher um das Achte-Eck beschrieben wird (§. 210 Geom.).

Es ist auch nicht nöthig, daß man AFB und ACE beschreibt, denn man darf nur AD und DF einander gleich machen, BF in BH tragen, und mit HA den Perpendicular DC in C durchschneiden, so hat man den Mittelpunct C, woraus durch A und B der verlangte Circul beschrieben wird. Und diese Construction ist so beschaffen, daß man sie in die Anfangs-Gründe der Geometrie eintragen kan.

Die 64. Aufgabe.

Tab. I. 169. Aus dem gegebenen Radio des
Fig. 5. Circuls AC die Seite des Zehen-Ecks AB
zufinden.

Auflösung.

Weil $AB = \frac{1}{10}$ der Peripherie, so ist der Winkel ACB 36° , folglich sind die Winkel CAB und ABC ein jeder 72° (§. 109 Geom.). Machet $AD = AC$, so ist jedervon den Winkeln ADC und DCA 36° (§. 101, 107 Geom.): daher DCB 72° , und demnach $BD:BC = BC:BA$ (§. 183 Geom.). Es sey $AC = BC = AD = a$, $AB = x$, so ist $BD = a + x$, und dannenhero vermöge dessen, was erwiesen worden ist,

$$a + x$$

$$\begin{array}{r}
 a+x : a = a : x \\
 \hline
 a^2 = ax + x^2 \\
 \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \quad (\S. 83) \\
 \hline
 \frac{5}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 \\
 \hline
 \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a + x \\
 \hline
 \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = x.
 \end{array}$$

Richtet auf dem Diameter AB den Radius DC = a aus dem Mittelpuncte C perpendicular auf (I. 95 Geom.), und theilet CB in 2 gleiche Theile in E (I. 120 Geom.); so ist CE = $\frac{1}{2}a$, und folglich DE = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (I. 172 Geom.): machet EF = DE, so ist CF = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. — $\frac{1}{2}a$.

Anmerkung.

170. Auf solche Art lehret Ptolameus Almag. lib. 1. die Seite des Zehen-Ecks zu finden.

Die 65. Aufgabe.

171. Aus dem gegebenen Radio des Tab. I. Circuls DC, die Seite des Fünf-Ecks AB zu finden.

Auflösung

$$\begin{array}{ll}
 \text{Es sey } DC = a & AB = x \\
 \text{so ist } DB = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a \quad (\S. 169) & BE = \frac{1}{2}x \\
 EC = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2} & \\
 DE = a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}. &
 \end{array}$$

M m m m m 3 Folg=

Folglich:

$$\begin{aligned} DE^2 &= 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2} \\ BE^2 &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } DB^2 &= 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2} \\ \text{es ist auch } DB^2 &= \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \end{aligned}$$

$$\text{Daher } \frac{1}{2}a + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2} = a$$

(S. 31 Ar.)

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}$$

$$\frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 4a^2 - x^2$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \\ &= a^2 + \frac{5}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \end{aligned}$$

Tab. I,
Fig. 5.

Demnach $AB^2 = DC^2 + DB^2$, das ist, das Quadrat des regulären Fünf-Ecks ist gleich dem Quadrate des Sechs-Ecks und Zehn-Ecks, welche in einem Circul beschrieben sind, zusammen genommen. Daher, weil DC die Seite des Sechs-Ecks, und FC die Seite des Zehn-Ecks (S. 169); so ist DE die Seite des Fünf-Ecks.

Tab. I,
Fig. 6.

Anmerkung.

172. Ptolomæus lehret abermal die Seite des Fünf-Ecks auf solche Art finden.

Zusatz.

173. Die halbe Seite des Fünf-Ecks ist der Sinus von 36° , die halbe Seite des Zehn-Ecks

Esß der Sinus von 13° (§. 2 Trig.). Des-
romegen können ihr aus dem gegebenen Ra-
dio des Circuls diese beyden Sinus finden
(§. 11 Trig.).

Die 66. Aufgabe.

174. Eine gerade Linie AC dergestalt Tab. I.
in F zuschneiden, daß die ganze Linie AC Fig. 6.
sich zu dem größern Theile CF verhält,
wie der größere Theil CF zu dem kleinern
FA, oder daß $CF^2 = AC$ in FA.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CF = x$, so ist $FA = a - x$
und also $x^2 = aa - ax$

$$\begin{array}{r} x^2 + ax = a^2 \\ \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2 \text{ (§. 83)} \\ \hline x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2 \\ x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} \\ \hline x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a. \end{array}$$

Setzet $AC = DC = a$ rechtwinclich zusam. Tab. I.
men, und machet $CE = \frac{1}{2}a$, so ist $DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ Fig. 6.
(§. 172 Geom.). Machet ferner $EF =$
 DE , so ist die Linie AC in F auf verlangte
Art getheilet.

Anmerkung.

175. Die alten Geometrae nennen dieses lineam
media & extrema ratione secare. Man pflegt es
auch divinam sectionem zuennen, weil (wie aus
dem Euclide zusehen ist) man viel aus dieser Linien
Theilung demonstrirt hat.

Zusatz.

176. Wenn a der Radius eines Circuls ist, so ist der grössere Theil von der Linie x die Seite des Zehen-Ecks (§. 169).

Die 67. Aufgabe.

Tab. I.
Fig. 7

177. Aus der gegebenen Hypothenuse eines rechtwinklichten Drey-Ecks AB und seinem Inhalte, das Drey-Eck ABD zu zeichnen.

Auflösung.

Es sey $AB=a$, der Perpendicular $DC=y$, der Inhalt $=bb$, so ist der Inhalt $=\frac{1}{2}ay$,
(§. 156 Geom.)

$$\text{und demnach } \frac{\frac{1}{2}ay=bb}{a} \\ y=\frac{2bb}{a}$$

Beschreibet über $AB=a$ einen halben Circul: richtet in A auf dem Diameter $AE=2b$ perpendicular auf, und ziehet die Linie EB. Machet $AG=\frac{1}{2}AE=b$, und ziehet FG mit EB parallel; so ist $AF=2bb:a$ (§. 87 Geom.). Wenn demnach FD mit dem Diameter AB parallel gezogen wird; so giebt sich der verlangte Triangel ADB.

Die 68. Aufgabe.

Tab. I.
Fig. 8.

178. Aus dem gegebenen Umfange $AB+BC+CA$ eines rechtwinklichten Triangels und seinem Inhalte, die größte Seite BC zu finden.

Auf,

Auflösung.

Es sey $AB+BC+CA=a$, $BC=x$,
 der Inhalt $=bb$, so ist $AC+BA=a-x$,
 $(AC+BA)^2=a^2-2ax+x^2$
 $AC^2+BA^2=x^2$ (§. 172 Geom.)

$$2BA \cdot AC = a^2 - 2ax \quad (\text{§. 93 Arithm})$$

daher (§. 156 Geom.)

$$a^2 - 2ax = 4bb$$

$$a^2 - 4bb = 2ax$$

$$\frac{1}{2}a - 2bb = x.$$

a

Suchet zu $AB=a$, $BC=2b$, und $BD=b$ die Tab. I.
 vierte proportional Linie $BE=2bb:a$ (§. 187 Fig. 9.
 Geom.). Beschreibet mit $BF=\frac{1}{2}a$ den Bo-
 gen FG ; so ist $EG=x$, und ihr könnet den
 verlangten Triangel nach der vorhergehenden
 den Aufgabe beschreiben.

Anmerkung.

179. Weil alle Flächen durch das Quadrat aus-
 gemessen werden (§. 147 Geom.); so giebt man in
 geometrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch
 eine Linie deren Quadrat ihr gleich ist.

Die 69. Aufgabe.

180. Aus der gegebenen Grund-Linie Tab. I.
 BC und den beyden Winkeln an derselben Fig. 1a.
 B und C , die Höhe AD zu finden.

M m m m m 5 Aufz

Auflösung.

Es sey $BC=a$, $AD=x$. Weil bey D rechte Winkel sind, so wisset ihr auch die Winkel BAD und DAC (§. 102 Geom.). Es sey der Sinus des Winkels ABD= t , der Sinus des Winkels BAD= r , der Sinus des Winkels DAC= q , der Sinus des Winkels ACD= p ; so ist $t:r=x:BD$, und $p:q=x:DC$ (§. 43 Trig.), folglich $BD=rx:t$; und $DC=qx:p$. Derowegen, weil $BD+DC=BC$, so habt ihr

$$\begin{array}{r} rt:t+qx:p=a \\ \hline pt \\ prx+tgx=apt \\ \hline pr+tg \\ x=apt:(pr+tg). \end{array}$$

Anders.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet, so ist BD der Tangens des Winkels BAD, und DC der Tangens des Winkels DAC (§. 6 Trigon.). Es sey der Sinus Totus= t , die Tangentes seyn m und n , so ist $t:m=x:BD$, und $t:n=x:DC$: folglich ist $BD=mx:t$, und $DC=nx:t$, und demnach

$$\begin{array}{r} a=(nx+mx):t \\ \hline at=nx+mx \\ \hline n-m \\ at:(n+m)=x. \end{array}$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium
der

der beyden Winkel BAD und DAC, dem Sinu toto und der Grund-Linie BC die vierte proportional-Zahl (§ 113 *Arithm.*); so kommt die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 70. Aufgabe.

181. Aus drey gegebenen Seiten eines Tab. I. Triangels AB, AC und CB die Höhe AD Fig. 10. zu finden.

Auflösung.

Es sey $AB=a$, $BD=x$,
 $BC=b$, so ist $DC=b-x$.
 $AC=c$,

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$, und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 172 *Geom.*), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folglich

$$\begin{array}{r} a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2 \\ \hline a^2 + b^2 - c^2 = 2bx \\ \hline a^2 - c^2 + \frac{1}{2}b = x. \\ \hline 2b \end{array}$$

Folglich $(a^2 - c^2) : 2b = (a + c) (a - c) : 2b$ der halbe Unterschied der Theile CD und BD (§. 61).

Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel ACB aus dem Scheitel-Puncte A auf die Grund-Linie CB ein Perpendicul AD gefällt wird; so verhält sich die Grund-Linie BC zu den beyden Schenkeln AB und AC zusammen genommen, wie der Unterschied derselben

zu dem Unterscheide der Theile von der
Grund-Linie BD und CD.

Wenn ihr BD habt, so könnet ihr (§. 172
Geom.) AD finden.

Es sey sey $a=6$, $b=4$, $c=3$, so ist $x=$
 $(36-9):8+2=27:8+2=5+\frac{3}{8}$ oder $= (9.$
 $3):8+2=27:8+2=3\frac{3}{8}+2=5\frac{3}{8}$.

$$AB^2=2304:64$$

$$BD^2=1849:64$$

$$AD^2=455:64 \quad (\S. 172 \text{ Geom.})$$

$$\begin{array}{r|rr|rr} 4 & 55 & 00 & 00 \\ 4 & & & \end{array} \left[21\frac{31}{100} \text{ demnach ist} \right.$$

$$\begin{array}{r|rr|} 55 & & \\ 41 & & \end{array} \quad AD=2133:800.$$

$$\begin{array}{r|rr|} 14 & 00 & \\ 4 & 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr|} 12 & 69 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr|rr} 1 & 31 & 00 & \\ & 42 & 63 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr|rr} 1 & 27 & 89 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr|rr} 1 & 3 & 11 & \text{u. s. w.} \end{array}$$

An-

Anmerkung.

182. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus drey gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden, wenn er stumpfwincklicht ist.

Zusatz.

183. Derowegen könnet ihr auch aus drey gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden, (§. 156 Geom.).

Die 71. Aufgabe.

184. Aus dem gegebenen Inhalte eines Tab. I. rechtwincklichten Triangels ABC, dessen Fig. 8. drey Seiten AC, BA, AC in einer geometrischen Progression sind, die Seiten selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $=a^2$, $AB=y$,
 $CA=x$,
 so ist $BC=x^2$ (§. 113 Arith.),

und demnach

$$x^4:y^2=x^2+y^2 \text{ (§. 172 Ge.) } xy=2a^2 \text{ (§. 156 Geom.)}$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^4}{y^4} = \frac{x^2+y^2}{y^2} \\ \frac{x^4}{y^4} = \frac{x^2}{y^2} + 1 \\ \frac{x^4}{y^4} - \frac{x^2}{y^2} = 1 \end{array}$$

ingleichen

$$\begin{array}{r} \frac{x}{y} = 2a^2:y \\ \frac{x^2}{y^2} = 4a^4:y^2 \\ \frac{x^4}{y^4} = 16a^8:y^4 \\ \frac{y}{x} = 2a^2:x \\ \frac{y^2}{x^2} = 4a^4:x^2 \\ \frac{y^4}{x^4} = 16a^8:x^4. \end{array}$$

Hier

Hieraus nun wird gefunden

$\begin{array}{r} 16a^2 - 4a^4 = y^4 \\ \hline y^4 \\ \hline 16a^8 - 4a^4 y^4 = y^8 \\ \hline 16a^8 = y^8 + 4a^4 y^4 \\ \hline 4a^8 \qquad 4a^8 \\ \hline 20a^8 = y^8 + 4a^4 y^4 + 4a^8 \\ \hline 2a^4 \sqrt{5} = y^4 + 2a^4 \\ \hline a^4 (2\sqrt{5} - 2) = y^4 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^4 - 4a^4 = 16a^8 \\ \hline x^4 \\ \hline x^8 - 4a^4 x^4 = 16a^8 \\ \hline 4a^8 \qquad 4a^8 \\ \hline x^8 - 4a^4 x^4 + 4a^8 = 20a^8 \\ \hline x^4 - 2a^4 = 2a^4 \sqrt{5} \\ \hline x^4 = a^4 (2 + 2\sqrt{5}) \end{array}$
---	--

Tab. I.
Fig. 11.

$a\sqrt{(2\sqrt{5}-2)} = y$ $x = a\sqrt{(2+2\sqrt{5})}$.
 Richtet auf $AB = a$ eine perpendicular-Linie
 $CA = 2a$ auf; so ist $BC = \sqrt{5}aa$. Machet
 $DB = AB = a$; so ist $DC = \sqrt{5}aa - a$. Tra-
 get DC aus C in E , und aus E in K die Linie
 $CA = 2a$, und beschreibet sowohl über AE
 als AK einen halben Circul. Zieheth durch
 C mit AB die Linie FL parallel; so ist $FC =$
 $\sqrt{(2a\sqrt{5}aa - 2aa)}$, und $CL = \sqrt{(2aa + 2a\sqrt{5}aa)}$,
 oder $FC = (\sqrt{2a^2\sqrt{5}-2}) = a\sqrt{(2\sqrt{5}-2)}$
 und $CL = a\sqrt{(2+2\sqrt{5})}$. Theilet CA
 in zween gleiche Theile in H , daß $CH = a$,
 und machet $CG = CF$, und $CM = CL$. Be-
 schreibet sowohl über HG , als HM einen
 halben Circul; so ist $CI = \sqrt{(aa\sqrt{(2\sqrt{5}-2)})}$
 $= a\sqrt{(2\sqrt{5}-2)} = y$, und $CN = \sqrt{(a^2\sqrt{(2+2\sqrt{5})})}$
 $= a\sqrt{(2+2\sqrt{5})} = x$. Derowegen,
 wenn

wenn ihr $CO=CN$ machet, und die Linie IO ziehet; so ist ICO der verlangte Triangel.

Die 72. Aufgabe.

185. Aus der gegebenen Summe der Tab. I. Seiten $AC+AB$ in einem rechtwinklich, Fig. 8. ten Triangel CAB und dem Perpendicular AD , die Seiten zu finden.

Auflösung.

Es sey $AB+AC=a$, $CA-BA=y$, $BC=x$, $AD=b$; so ist $AC=\frac{1}{2}(a+y)$, $AB=\frac{1}{2}(a-y)$ (§. 61, 172, 183 Geom.).

Folglich:

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & \frac{1}{2}(aa+yy) \\ \hline 2x^2 & = & aa+yy \\ \hline 2x^2 - a^2 & = & y^2, \end{array} \quad \begin{array}{l} BA:DA=BC:AC \\ \frac{1}{2}(a-y):b=x:\frac{1}{2}(a+y) \\ \hline \frac{1}{4}(aa-yy)=bx \\ \hline aa-4bx=yy. \end{array}$$

Derowegen $2x^2 - aa = aa - 4bx$

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 2bx & = & aa \\ \hline x^2 + 2bx + bb & = & aa + bb \quad (\S. 83.). \\ \hline x & = & \sqrt{(aa+bb)} - b. \end{array}$$

Auf der gegebenen Linie $CD=a$ beschreibet Tab. I. ein Rectangulum $CDFG$, dessen Höhe DF Fig. 12. der Höhe des Triangels b gleich ist: so ist
CF

$CF = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Mache $FE = FD$, und $CB = CE$: so ist $CB = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Beschreib demnach über CB einen halben Circul, und ziehet die Linien AB und AC ; so ist CAB der verlangte Triangel.

Die 73. Aufgabe.

Tab. II. 186. Aus dem gegebenen Sinu eines
Fig. 13. Winkels, den Sinum des doppelten, dreyfachen, vierfachen 2c. Winkels zu finden.

Auflösung.

Es sey der einfache Winkel LAM . Nemet AB für den Sinum Totum an, und mache $AB = BC = DC = DE = EK$, so ist BF der Sinus des Winkels A (§ 3 *Trigon.*), und $AF = FC$ (§. 107 *Geom.*) der Cosinus (§. 7 *Trig.*). Ferner $DBC = 2BAC$ (§. 101, 107 *Geom.*), $DCE = CDA + CAD$ (§. cit.) $= 3CAD$, $KDE = DEA + KAE$ (§. cit.) $= 4KAE$ u. s. w. Weil nemlich $CDA = CBD$ (§. 107 *Geom.*) $= 2BAC$, wie erwiesen worden ist, und $DEA = DCE$ (§. 107 *Geom.*) $= 3KAE$, wie gleichfalls erwiesen worden ist. Folglich ist GC der Sinus des doppelten, DH des dreyfachen, EI des vierfachen Winkels A (§. 3 *Trigon.*); hingegen BG der Cosinus des doppelten, CH des dreyfachen, DC des vierfachen Winkels (§. 7 *Trigon.*).

Es

Es sey $AB=r$, $BF=b$, $AF=c$,
so ist $AB:BF=AC:GC$ (J. 183 Geom.)

$$\frac{r}{b} = \frac{2c}{2bc:r}$$

$$AB:AF=AC:AG \text{ (J. cit.)}$$

$$\frac{r}{c} = \frac{2c}{2cc:r}$$

Derowegen ist $BG=GD=2cc:r-r=$
 $(2cc-rr):r=(\text{weil } r^2=b^2+c^2) (2cc-b^2-c^2):$
 $r=(c^2-b^2):r$, folglich $AD=AG+GD=$
 $(3c^2-b^2):r$.

Es ist ferner (J. 184 Geom.)

$$AB:BF=AD:DH$$

$$r:b=\frac{3c^2-b^2}{r}:\frac{3bc^2-b^3}{r^2}$$

$$AB:AF=AD:AH$$

$$r:c=\frac{3c^2-b^2}{r}:\frac{3c^3-b^2c}{r^2}$$

Derowegen ist $CH=HE=AH-AC=$
 $(3c^3-b^2c):r^2-2c=(3c^3-b^2c-2cr^2):r^2=$
 $(\text{weil } r^2=c^2+b^2) (3c^3-b^2c-2c^3-2b^2c):r^2=$
 $(c^3-3b^2c):r^2$, folglich $AE=EH+HA(3c^3-$
 $b^2c+c^3-3b^2c):r^2=(4c^3-4b^2c):r^2$.

Es ist weiter (J. 183 Geom.)

$$AB:BF=AE:EI$$

$$r:b=\frac{4c^3-4b^2c}{r^2}:\frac{4bc^3-4b^3c^3}{r^3}$$

$$AB:AF=AE:AI$$

$$r:c=\frac{4c^3-4b^2c}{r^2}:\frac{4c^4-4b^2c^2}{r^3}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Nnnnn Dero

Derowegen ist $DI = AI - AD = (4c^4 - 4b^2c^2) : r^3 - (3c^2 + b^2) : r = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3c^2r^2 + b^2r^2) : r^3 = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3b^2c^2 - 3c^4 + b^4 + b^2c^2) : r^3 = (c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$, weil nemlich $r^2 = b^2 + c^2$.

Wenn demnach der Sinus totus r , der Sinus des einfachen Winkels b , und sein Cofinus c ist, so ist der Sinus

des zweyfachen $2bc : r$

des dreyfachen $(3bc^2 - b^3) : r^2$

des vierfachen $(4bc^3 - 4b^3c) : r^3$

des fünffachen $(5bc^3 - 10b^3c^2 + b^5) : r^4$

des sechsfachen $(6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c) : r^5$

Hingegen der Sinus Complementi oder Cofinus

des zweyfachen $(cc - bb) : r$

des dreyfachen $(c^3 - 3b^2c) : r^2$

des vierfachen $(c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$

des fünffachen $(c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c) : r^4$

des sechsfachen $(c^6 - 15b^2c^4 + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$.

Wenn ihr diese Formeln gegen das Potenzen-Taflein (§. 91) haltet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die Glieder vor die Sinus aus den geraden, vor die Cofinus aber aus den ungeraden Stellen der Potenzen genommen werden, nur, daß das Mehr- und Minder-Zeichen beständig abwechselt. Wollt ihr demnach allgemeine Formeln haben; so dürfet ihr sie nur aus der allgemeinen Formel für die Potenzen ausschreiben. Nemlich der Sinus des vielfachen Bogens ist

mc

$$\begin{array}{r}
 \frac{mc^m - 1b - m.m - 1.m - 2.c^m - 3b^3 + m.m - 1.}{r^m - 1 \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad r^m - 1 \quad 1.} \\
 m - 2.m - 3.m - 4.c^m - 5b^5 \text{ \&c.} \quad \text{Hingegen} \\
 \frac{2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad r^m - 1}{\text{sein Cosinus ist } c^m - m.m - 1.c^m - 2b^2 + m.m - 1.} \\
 \frac{r^m - 1 \quad 1. \quad 2. \quad r^m - 1 \quad 1. \quad 2.}{m - 2.m - 3.c^m - 4b^4 \text{ \&c.}} \\
 \frac{3. \quad 4. \quad r^m - 1}{\quad}
 \end{array}$$

Zusatz.

187. Weil der Tangens des einfachen Winkels $t = br:c$, und also $c = br:t$ (§. 18 Trig.) und (J, cit.) wenn der Tangens des zwiefachen v ist

$$\frac{c^2 - b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r : v$$

$$\begin{array}{l}
 \text{das ist } \frac{c^2 - b^2}{b^2 r^2 - b^2} : \frac{2bc}{2b^2 r} = r : v \\
 \text{oder } \frac{c^2 - b^2}{t^2} : \frac{2c}{t} = r : v
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{so ist } r^2 - t^2 : 2tr = r : v \\
 \text{und } v = \frac{2tr^2}{r^2 - t^2}
 \end{array}$$

Anmerkung.

188. Auf eben diese Art könnet ihr die Tangentes der übrigen vielfachen Winkel, ja auch eine allgemeine Formel für alle Tangentes der vielfachen Winkel finden. Ihr könnet aber auch die Tangentes suchen, ohne daß ihr nöthig habt, die Sinus zu wissen, wie in der folgenden Aufgabe gezeigt wird. Und dazu habt ihr folgenden Satz nöthig.

Nnnnn 2

Wenn

Tab. II.
Fig. 14.

Wenn der Winkel CAB durch die Linie EA in zween gleiche Theile getheilet wird, so verhält sich die eine Seite AB zu dem ihr anliegenden Theile der Grundlinie BE, wie die Seite AC zu dem Theile EC, welcher an ihr liegt.

Beweis.

Berlängert BA in D, bis $AD=AC$, und ziehet die Linie CD. Weil der Winkel $CAB=ACD+ADC$ (§. 101 Geom.), und $ACD=ADC$ (§. 107 Geom.); so ist $ACD=\frac{1}{2}CAB=CAE$, folglich EA mit CD parallel (§. 98 Geom.), und daher $BA:BE=AD(=AC):EC$ (§. 184 Geom.). W. 3. E. W.

Zusatz.

189. Derwegen verhält sich auch $BA:AC=BE:EC$, folglich $BA+AC:AC=BC:EC$ (§. 142).

Tab. II.
Fig. 15.

Die 74. Aufgabe.

190. Aus dem Tangente und Secante des einfachen Winkels die Tangentes und Secantes des zweyfachen, dreyfachen, vierfachen 2c. zu finden.

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum an, so ist BC der Tangens des einfachen Winkels CAB, BD der Tangens des zweyfachen DAB u. s. w.

Es sey $AB=a$, $BC=b$, $BD=x$; so ist $CD=x-b$, $CD^2=x^2-2bx+b^2$, $AD^2=aa+xx$. Nun ist $AB:AD=BC:CD$ (§. 187),
und

und daher $AB^2 : AD^2 = BC^2 : CD^2$ (§. 142),
das ist,

$$\frac{a^2 : a^2 + x^2 = b^2 : x^2 - 2bx + b^2}{\frac{a^2b^2 + b^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2}{2a^2bx = a^2x^2 - b^2x^2} \quad a^2x - b^2x}$$

$$2a^2b : (a^2 - b^2) = x.$$

Derwegen ist $CD = x - b = 2a^2b : (a^2 - b^2)$
 $- b = (2a^2b - a^2b + b^3) : (a^2 - b^2) = (a^2b + b^3) : (a^2 - b^2).$

Den Secantem AD findet ihr nun also.

$BC : CD = AB : AD$ (§. 183).

$$b : a^2b + b^3 = a : AD$$

$$\frac{x^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

das ist $1 : a^2 + b^2 = a : AD,$

$$\frac{x^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

folglich $AD = (a^2 + b^2) : (a^2 - b^2).$

Oder wenn ihr den Secantem des einfachen
Winkels $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = c$ sehet, so ist AD
 $= ac^2 : (a^2 - b^2) = ac^2 : (2a^2 - c^2).$

Auf gleiche Art wird der Tangens des
dreifachen Winkels $BE = (3a^2b - b^3 : a^2 - 3b^2),$ und der Secans $AE = c^3 : (a^2 - 3b^2)$ gefun-
den, u. s. w.

Die 75. Aufgabe.

191. Aus dem gegebenen Inhalte ei- Tab. I.
nes rechtwinklichten Triangels ABC und Fig. 8.
dem Winkel B, die Seiten zu finden.

Nnnnn 3

Auf:

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= b^2$, $AB = x$
 der Sinus Torus $= r$, so ist
 der Tangens B $= t$, $r:t=x:AC$ (§. 6. Trig.)
 daher $AC = tx:r$.

Folglich:

$$tx^2:2r=b^2$$

$$x^2=(2b^2r:t)$$

$$x=\sqrt{(2b^2r:t)}.$$

Tab. II. Machet in den gegebenen Winkel EDA die
 Fig. 16. Seite $DA=2b$, und richtet AE perpendicular
 auf, so ist zugleich $AD=r$, und $AE=t$. Ver-
 längert EA in G, und richtet in D die per-
 pendicular-Linie DG auf; so ist $AG=2br:t$
 (§. 210 Geom.). Machet $AH=AG$, und thei-
 let AD in 2 gleiche Theile in I, daß $AI=b$.
 Werfet über HI einen halben Circul; so ist
 (§. 210 Geom.) $AL=\sqrt{(2b^2r:t)}$. Machet
 endlich $AB=AL$, und ziehet aus B die Linie
 BC mit DE parallel; so ist ABC der ver-
 langte Triangel. Denn, weil $CBA=EDA$
 (§. 97 Geom.), so hat der bey A rechtwinck-
 liche Triangel den verlangten Winkel:
 und da ferner die Seite BA durch die alge-
 braische Rechnung gefunden worden; so ist
 CAB der verlangte Triangel (§. 81 Geom.).

Die 76. Aufgabe.

Tab. II. 192. Ob des Renaldini Regel in einem
 Fig. 17. Circul ein jedes reguläres Viel-Eck zube-
 schreiben,

schreiben, richtig sey oder nicht, zu untersuchen.

Auflösung.

Die Regel des Renaldini ist diese: Wenn man über dem Diameter AB einen gleichseitigen Triangel aufrichtet, den Diameter AB aber in so viel gleiche Theile theilet, als die Peripherie soll getheilet werden, und aus F durch den andern Theilungs-Punct D die Linie FG zieht; so ist BG die Seite des verlangten Viel-Ecks. Wir wollen durch das Acht-Eck zeigen, daß die Regel unrichtig ist. Denn in andern Fällen verfähret man auf gleiche Weise. Es sey demnach der halbe Diameter $CB=1$, die halbe Seite des Vier-Ecks $EG=x$, und BG sey die Seite des Acht-Ecks; so ist $CD=\frac{1}{2}$, vermöge der Regel, und $FC=\sqrt{3}$ (§. 162). Weil nun FCB und CEG rechte Winkel sind, und $CDF=GDE$ (§. 61 Geom.); so ist (§. 183 Geom.).

$$FC:CD=EG:DE$$

$$\sqrt{3}:\frac{1}{2}=x:x.$$

$$\text{Daher ist } CE=\frac{1}{2}+x=\sqrt{3+x}, \text{ folglich,}$$

$$\text{weil } CE^2+EG^2=CG^2 \text{ (§. 172 Geom.)}$$

$$3+2x+3+x^2+x^2=1$$

$$12$$

$$12$$

$$\text{Nun nn } 4$$

$$3+$$

$$\begin{array}{r}
 3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12 \\
 \hline
 13x^2 + 2x\sqrt{3} = 9 \\
 \hline
 + 2x\sqrt{3} = 13 \\
 \hline
 x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} = \frac{9}{13} \\
 \hline
 x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} + \frac{4}{169} = \frac{9}{13} + \frac{4}{169} = \frac{120}{169} \\
 \hline
 x + \frac{2}{13}\sqrt{3} = \frac{1}{13}\sqrt{120} = \frac{2}{13}\sqrt{30} \text{ (§. 50.)} \\
 \hline
 x = \frac{2}{13}\sqrt{30} - \frac{2}{13}\sqrt{3}
 \end{array}$$

Nun ist aber $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 16 Trig.). Derowegen erhellet, daß die Regel des *Renaldini* die halbe Seite des Vier-Ecks unrichtig heraus bringet, wie noch klärer erhellet, wenn man in zehentheiligen Brüchen so wohl aus dem *Renaldinischen*, als dem wahren Werthe die Wurzel ziehet.

Die 77. Aufgabe.

193. Einen Circul zu finden, welcher so groß ist, als die Fläche eines gegebenen Cylinders.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders $= a$, sein Peripherie $= p$, die Höhe $= a$; so ist die Fläche $= ap$ (§. 221 Geom.). Es sey ferner der Diameter des Circuls $= x$, so ist $d:p = x:(px:d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $px:d$, folglich seine Fläche $px^2:4d$ (§. 108 Geom.). Derowegen ist

px^2

$$px^2 : 4d = ap$$

$$x^2 = 4ad$$

$$x = \sqrt{4ad} = 2\sqrt{ad}$$

oder $\frac{1}{2}x = \sqrt{ad}$.

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere proportional-Linie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Lehrsatz.

Die Fläche des Cylinders ist gleich einem Circul, dessen Radius die mittlere proportional-Linie ist zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 78. Aufgabe.

194. Aus der gegebenen Verhältniß der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter und dem Diameter eines Circuls, welcher seiner Fläche gleich ist, die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zu finden.

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältniß $m:n$, der Diameter des Circuls $=d$, seine Peripherie $=p$, die Höhe des Cylinders $=x$; so ist sein Diameter $=nx:m$, und seine Peripherie $=mpx:md$, folglich

$$npx^2 : md = \frac{1}{4}pd$$

$$x^2 = md^2 : 4n$$

$$x = \sqrt{(md^2 : 4n)}.$$

Nnnnn 5

Machet

Tab. II. Machet $AB=n$, und richtet darauf perpen-
Fig. 18. dicular auf $BC=m$. Machet ferner $AD=\frac{1}{2}d$, und richtet in D die perpendicular-Linie DE auf $=md:2n$. Machet endlich $DF=DE$, und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $DG=\sqrt{md^2:\sqrt{4n}}$ (§. 210 Geom.).

Die 79. Aufgabe.

195. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders, welcher ihr gleich ist, den Diameter des Cylinders zu finden.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders $=a$, der Diameter der Kugel $=d$, ihre Peripherie $=p$, der Diameter des Cylinders $=x$; so ist der Inhalt der Kugel $=\frac{1}{6}pd^2$ (§. 237 Geom.) die Peripherie des Cylinders $px:d$, sein Inhalt $apx^2:4d$ (§. 221 Geom.), und demnach $\frac{1}{6}pd^2=apx^2:4d$

$$\begin{array}{r} \hline \frac{4pd^2=apx^2}{\hline} \quad 4d \\ \hline \frac{\quad \quad \quad ap}{\hline} \\ \frac{2d^3=x^2}{\hline} \quad ap \\ \hline 3a \\ \hline \sqrt{(2d^3:3a)}=x. \end{array}$$

Tab. II. Es wird also der Werth von x eben wie in
Fig. 18. der vorhergehenden Aufgabe gefunden. Nämlich man macht $AB=a$, $BC=\frac{2}{3}d$, und $AD=d$; so ist $DE=DF=2d^2:3a$, folglich $DG=\sqrt{(2d^3:3a)}$.

Die

Die 80. Aufgabe.

196. Aus dem gegebenen Diameter und der Höhe eines Coni, den Diameter eines Cylinders zu finden, welcher ihm, der Höhe und dem Inhalte nach, gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $=d$, die Höhe $=a$, der Diameter des Cylinders $=x$, die Verhältniß des Diametri zur Peripherie $=d:p$; so ist der Inhalt des Coni $=\frac{1}{12}adp$ (S. 229 Geom.), die Peripherie des Cylinders $px:d$, und sein Inhalt $apx^2:3d$ (S. 221 Geom.), folglich

$$\begin{array}{r} \frac{1}{12}adp = apx^2 : 4d \\ \hline \frac{1}{3}ad^2p = apx^2 \quad 4d \\ \hline \frac{1}{3}d^2 = x^2 \quad ap \\ \hline \sqrt{\frac{1}{3}d^2} = x. \end{array}$$

Beschreibet auf dem Diameter des Kegels d einen gleichseitigen Triangel, und um denselben einen Circul; dieser ist viermal so groß als die Grundfläche des Cylinders (S. 164), folglich, wenn um den Radium dieses Circuls ein anderer beschrieben wird; so ist derselbe Radius der verlangte Diameter des Cylinders.

Die 81. Aufgabe.

197. Aus dem gegebenen Diameter eines
nes

nes Coni und seiner Höhe, den Diameter einer Kugel zu finden, welche ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Coni $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, der Diameter der Kugel $= x$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12}adp$ (§. 229 Geom.), hingegen der Inhalt der Kugel $px^3:6d$ (§. 237 Geom.). Derowegen ist

$$\frac{\frac{1}{12}adp = px^3:6d}{\frac{1}{2}ad^2 = x^3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}ad^2} = x.$$

Anmerkung.

198 Bisher habe ich in leichten geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeigt: nun aber wird es Zeit seyn, daß ich darthue, wie man in der höhern Geometrie mit sonderbarem Vortheile, sich derselben bediene. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen soll ich zeigen, wie man durch Hülfe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kan. Zwar dienet dazu hauptsächlich die differential- und integral Rechnung, von welcher in dem andern Theile gehandelt werden soll: allein man kan auch durch die gemeine Algebra gar viel anrichten. Damit ihr aber verstehen möget, was hinfort beygebracht werden soll; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein, als wenn diese Betrachtung ganz fruchtlos wäre. Vielmehr versichert euch, daß sie denenjenigen sehr zuflutten

zustatten kommt, welche die Geheimnisse der Natur und Kunst genauer als andere einzusehen beliebet. Ich würde leicht vergeblich reden, wenn ich einen weitläufigen Beweis davon führen wolte. Hier mercket nur überhaupt, daß man gewohnt ist, die krummen Linien durch algebraische Gleichungen zu erklären, welche die Relation gewisser geraden Linien, welche man innerhalb denselben ziehen kan, gegen einander andeuten. Z. E. Es sey AMB ein halber Circul, und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet $AB=a$, $AP=x$, so ist $PB=a-x$ es sey ferner $PM=y$; so ist beständig $y^2=ax-xx$ (§. 210 Geom. & §. 137 Algebra.). Derowegen drucket die Gleichung die Relation aus, welche die Linie PM zu AP in allen Punkten der Peripherie AMB hat. Und darum nennet man sie die Erklärung des Circuls. Oder es sey $AC=a$, $PC=x$, $PM=y$; so ist $a^2-x^2=y^2$ (§. 172 Geom.). Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus, welche PM und PC in allen Punkten der Peripherie gegen einander haben. Und also nennet man sie eine Erklärung des Circuls. Gleichwie nun aber alles, was von der Sache erkannt werden kan, aus ihrer Erklärung hergeleitet wird. (§. 2 Meth. Math.); so pflegt man aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten.

Tab. II.
Fig. 19.

Von den krummen Linien.

Die 13. Erklärung.

199. Die Linie AX , welche alle gerade Linien MM , welche mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden, in zween gleiche Theile PM und PM theilet, wird der Diameter, und insonderheit die Aze genennet, wenn sie mit

Tab II.
Fig. 20.

mit eben den Linien einen rechten Winkel macht

Die 14. Erklärung.

200. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Helften aber PM die Semiordinaten genannt.

Die 15. Erklärung.

201. Zugewogen die Abscisse PM ist das Stück des Diameters oder der Aye, welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 16. Erklärung.

Tab. II.
Fig. 20.

202. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A, worinnen sich die Aye oder auch der Diameter AX endet.

Die 17. Erklärung.

203. Eine algebraische Linie wird genannt; deren Natur durch eine algebraische Gleichung sich erklären läßt.

Die 1. Anmerkung.

204. Durch die algebraischen Gleichungen verstehen wir diejenigen, welche einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Gleichung des Circuls $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 198).

Die 2. Anmerkung.

205. Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die algebraischen Linien geometrische Linien; allein, wir sind bey der Benennung des Herrn von Leibniz geblieben, mit welchem auch der große Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmt, welcher (in *Arithm. Univ.* p. 280.) wohl erinnert, daß nicht

nicht die Gleichung Ursache sey, warum man eine krumme Linie zur Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen solle, sondern es solle vielmehr dazum geschehen, weil sie sich leicht beschreiben läßt.

Die 18. Erklärung.

205. Eine transcendente Linie wird genennet, deren Natur durch keine algebraische Gleichung sich erklären läßt.

Anmerkung.

207. Insgemein nennet man die transcendente Linien mechanische Linien, abermals mit dem des Cartes, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie, welche sich leicht beschreiben lassen: welches wir mit dem Herrn von Leibniz mit Recht misbilligen, welcher eine besondere Art der Gleichungen für diese Linien erfunden hat, durch welche ihre Eigenschaften so wohl als algebraischen Linien heraus gebracht werden.

Die 19. Erklärung.

208. Alle algebraischen Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet, da die Glieder der Gleichungen auf gleiche Abmessungen steigen. Da nun die Gleichung für eine gerade Linie allein eine Abmessung haben kan, so nennet man eine Linie von dem ersten Geschlechte, wenn die Glieder der Gleichung zwei Abmessungen haben: sind derselben drey, so ist es eine Linie von dem andern Geschlechte: sind ihrer vier: eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.

Anmerkung.

209. Die Gleichung für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der
Circ

Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wiederum, wenn $ax=y^2$ die Natur einer krummen Linie erklärt; so ist dieselbe abermal eine von dem ersten Geschlechte. Hingegen, wenn die Erklärung der krummen Linie $a^2x=y^3$ ist, so ist sie eine Linie von dem andern Geschlechte.

Die 20. Erklärung.

210. Die algebraischen Linien rechnen wir zu einer Familie, in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten mit einander übereinkommen.

Die 1. Anmerkung.

211. Demnach gehören die krummen Linien, dessen Natur durch die Gleichungen $ax=y^2$, $a^2x=y^3$, $a^3x=y^4$ erklärt wird, zu einer Familie.

Zusatz.

212. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden, welche zu einer Familie gehören, wenn man nemlich für die determinirten Exponenten undeterminirte setzt.

Die 2. Anmerkung.

213. Solchergehalt sind alle krummen Linien, welche sich durch $ax=y^2$, $a^2x=y^3$, $a^3x=y^4$ u. s. w. erklären lassen, unter dieser Gleichung enthalten, $a^{m-1}x=y^m$ oder, wenn $a=1$ angenommen wird, $x=y^m$.

Die 3. Anmerkung.

214. Solchergehalt könnet ihr alle algebraischen Linien für eine große Familie rechnen, welche aus unendlich kleinern bestehet, deren jede unendliche Geschlechter hat. Denn, weil in allen Gleichungen, wo
durch

durch die Natur der krummen Linien erklärt wird, entweder eine gewisse Dignität der Abscisse und Ordinate bloß durch bekannte Größen, oder zugleich verschiedene Dignitäten derselben in einander, oder auch für einige Glieder lauter bekannte Größen in einander multipliciret werden, alle Gleichungen aber sich auflösen, wenn man alle Glieder auf eine Seite setzt; (als anstatt $ax = y^2$ könnet ihr sagen $y^2 - ax = 0$) so wird eine General-Gleichung für alle algebraischen Linien seyn $ay^m + bx^n + cy^r x^s + dx = 0$. Man setzt überall das Zeichen x , weil die Zeichen auf gar viele Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerkung.

215. Diese Eintheilung der Linien in ihre Geschlechter und Familien hat ihren Nutzen, und dienet die letztere sonderlich dazu, daß wir dasjenige, was vielen Linien gemein ist, auf einmal erkennen. Die erstere Eintheilung ist zu dem Ende aufgebracht worden, daß man eine Wahl der Linien anstellen könnte, wenn man einige zu Auflösung einer Aufgabe aussuchen soll; wovon ich an seinem Orte reden will.

Die 5. Anmerkung.

216. Unter den krummen Linien sind sonderlich diejenigen vor andern berühmt, welche aus geschickter Zerschneidung eines Kegels oder Coni entstehen, und daher von den Alten *Sectiones Conicae* oder Kegel-Schnitte genennet worden sind. Denn, weil sie die Alten nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; so haben sie auch viel von ihren Eigenschaften geschrieben, und die neuern haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmsten Eigenschaften durch algebraische Rechnungen untersuchen, und zu dem Ende vor ihre Erklärungen algebraische Gleichungen annehmen. Es sind aber dieser Linien drey, nemlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Mercket hier einmal für alles (Wolfs Mathes. Tom. IV.) D o o o o mal,

mal, daß wir beständig die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 21. Erklärung.

217. Die *PARABOLA* ist eine krumme Linie, in welcher $ax = y^2$, das ist, in welcher das Quadrat der halben Ordinate dem Rectangulo aus der Abscisse in eine beständige Linie gleich ist, welche der Parameter genennet wird.

Der 1. Zusatz.

219. Derwegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$, das ist, der Parameter ist die dritte proportional-Linie zu einer jeden Abscisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

218. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$, das ist, die halbe Ordinate ist die mittlere proportional-Linie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Abscisse.

Der 3. Zusatz.

220. Solchergestalt können ihr eine Parabel beschreiben, wenn deren Parameter gegeben wird. Traget nemlich auf die Linie AX den Parameter BA , und ziehet durch A die Linie CD auf AX perpendicular. Beschreibet nach Gefallen Circul, welche einander in B berühren, und die Linie BX in P , die Linie CD in 1. 2. 3. 4. 5. durchschneiden. Durch P ziehet Linien I. I, II II, III. III, u. s. w. mit CD parallel, und lasset auf dieselben aus 1. 2. 3 u. s. w. perpendicular-Linien 1. I, 2. II, 3. III, u. s. w. her-

Tab. II.
Fig. 21.

herunter fallen, oder, welches gleich viel ist, machet $PI=A_1$, $PII=A_2$, $PIII=A_3$ u. s. w. so sind die Puncte I, II, III, u. s. w. in der Parabel. Denn es sey $AB=a$, $AP=x$, $A_3=PIII=y$; so ist $y^2=ax$ (§. 210 Geom.), und also der Punct III in der Parabel (§. 217).

Der 4. Zusatz.

221. Ihr könnet auch in einer jeden Para- Tab. III.
bel einen verlangten Punct geometrisch de- Fig. 22.
terminiren. Z. E. Ihr wollet wissen, ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P einen Perpendicular fallen, und traget aus P in B den Parameter. Werfet über BA einen halben Circul, wenn er durch den Punct M gehet, so ist er in der Parabel (§. 210 Geom. & §. 217 Algebr.).

Der 5. Zusatz.

222. Endlich ist $x=y^2:a$, das ist, die Ab- Tab. III.
scisse ist die dritte proportional-Linie zu dem Fig. 23
Parameter und der halben Ordinate. Daher, wenn AB der Parameter ist, und BAQN ein Rectangulum; wenn man ferner NM mit BP parallel ziehet, und auf AN die Linie AM perpendicular aufrichtet; so ist der Punct M in der Parabel. Denn in dem bey A rechtwinklichten Triangel NAM ist $NQ:QA=QA:QM$, das ist, $AB:PM=PM:AP$, oder $a:y=y:x$.

Der 6. Zusatz.

223. Die erklärte Parabel (welche man die Apollonische zu nennen pflegt, weil
D o o o o 2 Apol-

Apollonius Pergæus unter den Älten gründlich von ihr geschrieben hat) ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§. 208).

Der 7. Zusatz.

224. Wenn ihr demnach $a^2x=y^3$, $a^3x=y^4$, $a^4x=y^5$ &c. sehet, so habt ihr Parabeln von dem andern, dritten, vierten zc. Geschlechte. Und daher erkläret $a^{m-1}x=y^m$ eine ganze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln. Gleichergestalt, wenn ihr $ax^2=y^3$, $ax^3=y^4$, $ax^4=y^5$ &c. sehet; so habt ihr noch andere Arten der Parabeln von dem andern, dritten, vierten Geschlechte, welche alle unter der Gleichung $ax^{m-1}=y^m$ begriffen sind. Beide Familien gehören unter diese Gleichung, nebst unendlich vielen andern Linien $a^nx^m=y^{n+m}$.

Der 8. Zusatz.

Tab. III.
Fig. 23.

225. Wenn ihr auf die Sehne AM der Parabel von dem ersten Geschlechte einen Perpendicular AR aufrichtet, welcher die Semiordinate PM, wenn sie verlängert wird, in R durchschneidet; so ist der Punct R in der Parabel von dem andern Geschlechte. Denn, wegen des rechten Winkels bey A ist $PM:AP=AP:PR$ (§. 210 Geom.), und daher $PM^2:AP^2=AP^2:PR^2$, oder $PM^2:SR^2=SR^2:AS^2$ (§. 142). Wenn ihr demnach $AB=a$, $AP=SR=y$, und $PR=SA=x$ sehet; so habt ihr $ay:y^2=y^2:x^2$, folglich $y^3=ax^2$.

Die

Die 1. Anmerkung.

226. Auf gleiche Weise wird vermittlest der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort, gefunden, wie ich in den Actis Eruditorum des 1717ten Jahres gezeigt habe.

Der 9. Zusatz.

227. Wenn ihr AS dem Parameter gleich Tab. III. macht, und RS in S perpendicular aufrichtet, Fig. 24. dann aus S in R die halbe Ordinate QM traget, und endlich aus A durch R die Linie AN ziehet; so ist N ein Punct in der Parabel von dem andern Geschlechte, in welcher $y^3 = a^2x$. Denn es sey $AQ = y$, $AS = a$; so ist $QM = SR = y^2 : a$, folglich, da $AS : SR = AQ : QN$, das ist, $a : \frac{y^2}{a} = y : x$; so findet ihr $a^2x = y^3$,

oder $a^2. QN = AQ^3$.

Die 2. Anmerkung.

228. Auf gleiche Weise wird, vermittlest der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort, gefunden, wie ich gleichfalls in den Actis Eruditorum A. 1717. gezeigt habe.

Die 22. Erklärung.

229. Der brenn-Punct (Focus) ist der Punct in der Ase, wo der Parameter die Ordinate abgiebt.

Die 82. Aufgabe.

230. Die Weite des brenn-Puncts F Tab. III. von der Scheitel A zu finden. Fig. 25.

Auflösung.

Es sey $AF = x$, der Parameter $= a$, so ist $FR = \frac{1}{2}a$ (§. 229), folglich

$$000 \ 00 \ 3 \qquad \frac{1}{4} a^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 = ax}{\frac{1}{4}a = x.}$$

Tab. III,
Fig. 25.

In der Parabel ist die Weite des brenn-Puncts F von der Scheitel A dem vierten Theile des Parameters gleich.

Die 83. Aufgabe.

231. Die Verhältniß zu finden, welche die Ordinaten gegen einander haben.

Auflösung.

Tab. III,
Fig. 22.

Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, so ist $y^2 = ax$, und $z^2 = av$ (§. 217), folglich $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 144). Demnach ist $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$, das ist:

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Abscissen.

Die 84. Aufgabe.

232. Die GröÙe des Rectanguli aus der Summe zweier halben Ordinaten $PM \mp pm$ in ihre Differenz mR , zu finden.

Auflösung.

$$\begin{array}{l} pm \mp PM = \sqrt{av} \mp \sqrt{ax} \\ mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} pm \mp PM \\ mR \end{array}} \right\} \text{§. 219}$$

$$(pm \mp PM)mR = av - ax = a(v - x).$$

Das

Das Rectangulum aus der Summe zweier halben Ordinaten in ihre Differenz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differenz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

233. Derwegen verhält sich der Parameter zu der Summe zweier halben Ordinaten, wie ihre Differenz zu der Differenz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

234. Die Verhältniß der Sehnen AM und Am zu finden, welche aus der Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinaten gezogen werden. Tab. III. Fig. 22.

Auflösung.

Weil $PM^2 = ax$, $AP^2 = x^2$; so ist $AM^2 = ax + x^2$ (J. 172 Geom.). Wiederum, wenn ihr $AP = v$ setzet; so ist $AM^2 = av + v^2$. Derwegen ist

$$\begin{aligned} AM^2 : Am^2 &= ax + x^2 : av + v^2 \\ &= (a + x)x : (a + v)v. \end{aligned}$$

Die Quadrate der Sehnen AM und Am verhalten sich in der Parabel, wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die 86. Aufgabe.

235. Die GröÙe der Linie FM zu finden. Tab. III. Fig. 25.

ooo oo 4

den, welche aus dem brenn-Puncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, so ist $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 230), $PF = x - \frac{1}{4}a$, folglich

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

$$PM^2 = ax \quad (\S. 217)$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 172 \text{ Geom.}).$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Die gerade Linie FM, welche aus dem brenn-Puncte F einer Parabel, gegen das Ende ihrer Ordinate M gezogen wird, ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Weite des brenn-Puncts von der Scheitel.

Der 1. Zusatz.

Tab. III.
Fig. 25.

236. Wenn ihr den vierten Theil des Parameters aus A in F und in f traget, durch AX so viel parallel-Linien MM ziehet, als euch gefällt, und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermal eine Parabel beschreiben.

Der 2. Zusatz.

Tab. III.
Fig. 26.

237. Ihr könnet auch dieses durch die Bewegung verrichten. Denn, nehmet, wie vorher, auf der Axe $Af = AF = \frac{1}{4}a$. Befestiget in f ein Lineal DC dergestalt, daß es in f mit fX einen

einen rechten Winkel macht. Nehmet ein Winkel-Maß IGH, und befestiget an seinem einem Ende einen Faden, welcher ihm gleich ist; das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel, welchen ihr in dem brenn-Puncte F eingeschlagen habt. Wenn ihr einen Stift an das Winkel-Maß IGH haltet, und es an dem Lineale DC verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn, es ist beständig $FM = AP + Af = x + \frac{1}{2}a$, und daher M ein Punct in der Parabel (§. 235).

Anmerkung.

238. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigensch. Tab. III. schaften der Parabeln von höheren Geschlechtern untersuchen. Sollt ihr aber diejenigen haben, welche allen Parabeln gemein sind, so dürft ihr nur die allgemeine Gleichung für ihre ganze Familie annehmen. Denn weil $a^m - 1x = y^m$, so ist auch $a^m - 1v = z^m$, folglich $PM^m : pm^m = AP : Ap$.
Wiederum, weil $PM + pm = \sqrt{a^m - 1x} + \sqrt{a^m - 1v}$,
 $mR = \sqrt{a^m - 1v} - \sqrt{a^m - 1x}$; so ist $(PM + pm) \cdot mR =$ Tab. III.
Fig. 25,
 $\sqrt{a^{2m} - 2v^2} - \sqrt{a^{2m} - 2x^2}$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$;
so ist $a^m : 2^m = a^m - 1x$, folglich $x = a : 2^m = AF$.
Derowegen kommt in den Parabeln von dem höheren Geschlechte der brenn-Punct dem Scheitel-Puncte immer näher, wenn sie einen Parameter haben.

Die 23. Erklärung.

239. Die *ELLIPSIS* ist eine krumme Linie, in welcher sich verhält das Rectangulum
Doo oo 5 gulum

gulum aus den Theilen der Axc AP und PB, zu dem Quadrate ihrer halben Ordinate PM, wie die Axc AB zu einer unveränderlichen Linie, welche ihr Parameter genennet wird: das ist, wenn ihr $AB = a$, den Parameter $= b$, $PM = y$, und $AP = x$ setzt, in welcher $ay^2 = abx - bx^2$.

Der 1. Zusatz.

240. Diewegen ist $y^2 = bx - bx^2 : a$, das ist, das Quadrat der halben Ordinate ist gleich einem Rectangulo aus der Abscisse in den Parameter, weniger ein Rectangulum aus eben dieser Abscisse in die vierte proportional-Linie zu der Axc, dem Parameter und der Abscisse.

Der 2. Zusatz.

241. Weil $ay^2 = abx - bx^2$, so ist

$$bx^2 : (bx - y^2) = a.$$

Tab. III.
Fig. 28.

Demnach könnet ihr in einer Ellipsi aus dem gegebenen Parameter, der Abscisse und halben Ordinate, die Axc folgendergestalt finden. Suchet zu $PE = b$, $PM = PF = y$ die dritte proportional-Linie $PG = y^2 : b$. Mächet $AP = x$, und $PH = PG$; so ist $AH = x - y^2 : b = (bx - y^2) : b$. Mächet ferner $AL = AH$, und $AL = AP = x$, und ziehet LB mit IP parallel; so ist $AB = a$, oder die verlangte Axc.

Der

Der 3. Zusatz.

242. Wiederum, weil $ayy = abx - bxx$, so ist $b = ayy : (ax - x^2)$, und daher könnet ihr in einer gegebenen Ellipsi den Parameter also finden. Richtet in B die perpendicular-Li. Tab. III. nie BE auf, und ziehet aus A durch M die Linie Fig. 29. AE, so ist $BE = ay : x$ (§. 184 Geom.). Machet $BG = PM$, und ziehet die Linie PE, und mit ihr GH parallel; so ist $BH = ay^2 : (ax - x^2) = b$ (§. cit.), das ist, der verlangte Parameter.

Der 4. Zusatz.

243. Weil $yy = (abx - bxx) : a$, so ist $y = \sqrt{(bx - bxx : a)}$. Derowegen, wenn euch die Aye und der Parameter gegeben werden, so könnet ihr für jede Abscisse ihre gehörige halbe Ordinate folgendergestalt finden. Suchet zu der Aye $AB = a$, dem Parameter Tab. III. $BC = b$, und der Abscisse $AP = x$ die vierte Fig. 30. proportional-Linie $PD = bx : a$. Ziehet DE mit AB parallel; so ist $CE = b - bx : a$. Machet $PF = CE$, und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $PM = \sqrt{(bx - bxx : a)} = y$, das ist, die verlangte halbe Ordinate.

Die 87. Aufgabe.

244. Die Weite des brenn-Puncts AF von der Scheitel A zu finden.

Auf:

Auflösung.

Tab. III. Es sey $AB = a$, der Parameter $= b$,
Fig. 27. $AF = x$, so ist $FR = \frac{1}{2}b$ (§. 229), und

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bxx \quad (\S. 239).$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$$

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)} = x.$$

Traget aus B in $E, \frac{1}{2}b$; so ist $CE = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.
Beschreibet über AE einen halben Circul,
welcher die in dem Mittel-Puncte C aufge-
richtete perpendicular-Linie CD in G durch-
schneidet; so ist $GC = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$. Machtet
 $CF = GC$; so ist in F der brenn-Punct.

Zusatz.

245. Also ist die Weite des brenn-Puncts
von dem Mittel-Puncte $C = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab\right)}$,
das ist, die mittlere proportional-Linie zwi-
schen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

Die 24. Erklärung.

Tab. III. 246. Die perpendicular-Linie DC, wel-
Fig. 27. che die grössere Are AB in zween gleiche
Theile theilet, ist die halbe kleine Are.

Die

Die 88. Aufgabe.

247. Aus dem gegebenen Parameter Tab. III. und der großen Arc AB, die halbe kleine Fig. 27. Arc CD zu finden.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$, $CD = \frac{1}{2}z$, so ist

$$\begin{array}{l} \frac{\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}z^2 = a : b \text{ (§. 239).}}{z^2 = ab} \\ \hline z = \sqrt{ab}. \end{array}$$

das ist:

Die kleine Arc in der Ellipfi ist die mittlere proportional = Linie zwischen der großen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz.

248. Derwegen ist der Parameter die dritte proportional-Linie zu der großen und kleinen Arc.

Der 2. Zusatz.

249. Wenn die Weite des brenn. Puncts Tab. III. von der Scheitel $AF = x$ ist; so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 244). Derwegen ist das Rectangulum aus der Weite des brenn. Puncts von der Scheitel AF in ihr Complement zur großen Arc FB dem Rectangulo aus der großen

großen Ase in den vierten Theil des Parameters gleich.

Die 89. Aufgabe.

Tab. III.
Fig. 27.

250. Die Verhältniß zu finden, welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegen einander haben.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, der Parameter $= b$,
 $AP = x$, $PM = y$, $Ap = z$, $pm = v$, so ist

$$\left. \begin{array}{l} yy = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array} \right\} (\S. 240).$$

Derowegen ist $y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2 = ax - x^2 : az - z^2 = (a-x)x : (a-z)z$,
das ist, $PM^2 : pm^2 = PB \cdot AP : pB \cdot Ap$,
nemlich

In der Ellipsi verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten, wie die Rectangula aus den Theilen der Ase.

Der 1. Zusatz.

251. Derowegen ist auch $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP \cdot PB$, folglich $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP \cdot PB$ (§. 142), das ist, das Quadrat der halben kleinen Ase verhält sich zu dem Quadrate der halben großen, wie das Quadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der Ase.

Der

Der 2. Zusatz.

252. Setzet demnach $CP = x$, so ist $AP = \frac{1}{2}a - x$, $PB = \frac{1}{2}b + x$, folglich $\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2$; Fig. 27.
 $\frac{1}{4}a^2 - x^2$. Derowegen ist

$$\frac{ay^2 = \frac{1}{4}a^2b - bx^2}{y^2 = \frac{1}{4}ab - bx^2 : a.}$$

Der 3. Zusatz.

253. Es sey $CD = d$, $AC = r$, $PC = x$; ist $AP = r - x$, und $PB = r + x$, folglich $AP \cdot PB = r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$, und daher

$$\frac{d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2}{y^2 = a^2 (r^2 - x^2) : r^2.}$$

Also habt ihr noch eine andere Gleichung, welche die Natur der Ellipsis erkläret.

Die 90. Aufgabe.

254. Die Grösse der Linie zu determiniren, welche aus dem brenn-Puncte f an das Ende D der kleinen Ase gezogen wird. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$, so ist $fc^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab$ (§. 245), und $DC^2 = \frac{1}{4}ab$ (§. 247), folglich $fd^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. 172 Geom.). Dannenhero $fd = \frac{1}{2}a = CB$.

Zusatz.

255. Wenn euch die kleine und große Ase gegeben

gegeben werden, so könnet ihr die brenn-Puncte f und F gar leicht finden. Denn, theilet die große Ase AB in zween gleiche Theile in C , und richtet aus C die halbe kleine Ase CD perpendicular auf; so könnet ihr aus D mit der halben großen Ase CB die brenn-Puncte F und f determiniren.

Tab. III.
Fig. 27.

Die 91. Aufgabe.

256. Die Gröſſe der geraden Linien FM und fM zu finden, welche aus beyden brenn-Puncten F und f an das Ende Meiner Semiordinate PM gezogen werden.

Tab. III.
Fig. 31.

Auflösung.

Es ſey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; ſo iſt $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$, $Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun iſt (§. 251)

$$BC^2 : DC^2 = AP : PB : PM^2$$

Das iſt, $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$

$$1 : 1 - \frac{4c^2}{a^2}$$

Solchergeſtalt iſt

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$

$$PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$FM^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a.$$

Wie

Wiedernm:

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$

$$Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$fM^2 = c^2 + ac - 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

$$fM + FM = a = AB, \text{ nemlich:}$$

In der Ellipſi ſind die beyden Linien fM und FM, welche aus den Brenn-Puncten F und f, an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden, zuſammen genommen, der groſſen Arc AB gleich.

Zuſatz.

257. Daher könnet ihr gar leicht aus der Tab. III. gegebenen groſſen und kleinen Arc die Elli-
pſia beſchreiben. Denn, ſuchet die Brenn-Puncte F und f, und ſchlaget in ihnen zweyen Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf, welcher ſo lang iſt als die groſſe Arc AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus, und führet den Stift an dem Faden herum, ſo wird die Eliptis beſchrieben.

Anmerkung.

258. Auſſer der Ellipſi des Apollonii, welche von dem erſten Geſchlechte iſt, könnet ihr noch unzähllich viel andere von höhern Geſchlechtern erdencken, welche unter der allgemeinen Gleichung begriffen werden: $ay^{m+n} = bx^{in} (a - x)^n$. Es iſt
(Wolfs Mathef. Tom. IV.) Ppp pp nem:

wie der Parameter zu der großen Ase, also die Dignität der halben Ordinate, deren Exponent den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der Ase zusammen gleich ist, zu dem Producte aus diesen Dignitäten. 3. E. In der Ellipsi von dem andern Geschlechte ist $b:a=y^3:x^2(a-x)$; in der Ellipsi von dem vierten Geschlechte $b:a=y^4:x^2(a-x)^2$.

Die 2. Anmerkung.

259. Wenn die große Ase der kleinen gleich wird, so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}a^2$ (§. 247), und daher $b=a$, folglich an statt $ay^2=abx-bx^2$ bekommt ihr $ay^2=a^2x-ax^2$, das ist, $y^2=ax-xx$, welche Gleichung den Circul erklärt. Wie man nun aber Ellipses von höhern Geschlechtern hat, also gibt es auch Circul von höhern Geschlechtern, wenn ihr nemlich sehet $AP^m:PM^m=PM:PB$, das ist, $x^m:y^m=y:a-x$. Also ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m-x^{m+1}=y^{m+1}$. 3. E. Wenn $m=1$, so ist $ax-xx=y^2$ für den Circul des ersten Geschlechtes; ist $m=4$, so ist $ax^4-xx^5=y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierten Geschlechte.

Tab. II.
Fig. 19.

Die 25. Erklärung.

660. Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher $ay^2=abx+bx^2$, das ist, wie eine unveränderliche Linie b , welche der Parameter heisset, zu einer andern unveränderlichen Linie a , welche die Zwerch-Ase (Axis transversus) genennet wird, so das Quadrat der Semordinate y^2 zu dem Rectangulo aus der

der Summe der Abscisse und Zwerch-Are $a+x$ in die Abscisse x .

Zusatz.

261. Derwegen ist $y^2 = bx \pm bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax \pm xx)$, $a = bx^2 : (y^2 - bx)$ u. s. w. wie in der Ellipsi, nur daß ihr das Zeichen \pm an statt des Zeichens $-$ habet.

Die 26. Erklärung.

262. Weil die Gleichung der Hyperbel mit der Gleichung für die Ellipsin übereinkommt, nur, daß sie blos in dem einen Zeichen von ihr unterschieden ist; so nennet man auch hier die mittlere proportional-Linie zwischen der Zwerch-Are und dem Parameter, die kleine Are.

Die 27. Erklärung.

263. Wenn ihr die Are der Hyperbel Tab. IV. Fig. 32. AX über ihre Scheitel A verlängert, und AB der Zwerch-Are gleich machet, so heisset der Punct C, durch welchen AB in zween gleiche Theile getheilet wird, der Mittel-Punct.

Die 92. Aufgabe.

264. Aus dem gegebenen Parameter Tab. IV. Fig. 32. und der Zwerch-Are AB, die Weite des Brenn-Puncts F von der Scheitel A, zu finden.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$; so ist $FR = \frac{1}{2}b$ (§. 229) und (§. 260).

Pr p p p 2

$b : a$

$$\begin{array}{r}
 b:a=\frac{1}{4}bb:ax+xx \\
 \hline
 \frac{1}{4}abb=abx+bx^2 \\
 \hline
 \frac{1}{4}ab=ax+xx \quad b \\
 \hline
 \frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}aa+ax+xx \\
 \hline
 \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}ab\right)}=\frac{1}{2}a+x \\
 \hline
 \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}ab\right)}-\frac{1}{2}a=x.
 \end{array}$$

Tab. IV. Machet $BE=\frac{1}{2}b$, so ist $EC=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Rich-
 Fig. 32. tet in C einen Perpendicular auf, und beschrei-
 bet über EA einen halben Circul; so ist CG
 $=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}ab\right)}$. Machet $CF=CG$; so ist
 in F der Brenn-Punct.

Der 1. Zusatz.

265. Also ist die Weite des Brenn-Pun-
 ctes von dem Mittelpuncte $FC=\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}ab\right)}$.

Der 2. Zusatz.

266. Weil $ax+xx=\frac{1}{4}ab$, und $ax+xx=$
 $AF \cdot FB$; hingegen $\frac{1}{4}ab$ das Quadrat der hal-
 ben kleinen Ase CD (§. 262); so ist $AF \cdot FB$
 $=CD^2$.

Die 93. Aufgabe.

Tab. IV. 267. Die Verhältniß zu finden, welche
 Fig. 32. die Semiordinaten PM und pm gegen ein-
 ander haben.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $AB=a$, der Parameter $=b$, $AP=x$, $PM=y$, $Ap=v$, $pm=z$, so ist $y^2:z^2=(bx+bx^2:a):(bv+bv^2:a)$
 $=ax+xx:av+vv=(a+x)x:(a+v)v$ das ist,
 $PM^2:pm^2=PB \cdot AP:pB \cdot Ap$, nemlich:

Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich, wie die Rectangula aus den Abscissen und der Zwerch-Axe in die Abscissen.

Die 94. Aufgabe.

268. Die Verhältniß zu finden, welche das Quadrat der Zwerch-Axe zu dem Quadrate der kleinen Axe hat.

Auflösung.

Das Quadrat der Zwerch-Axe ist aa , der kleinen Axe aber ab (§. 262). Also verhält sich jenes zu diesem, wie aa zu ab , das ist, wie a zu b (§. 144), oder wie die Zwerch-Axe zu dem Parameter.

Zusatz.

269. Weil $b:a=PM^2:AP \cdot PB$, (§. 260); Tab. IV. so ist auch das Quadrat der kleinen Axe zu Fig. 32. dem Quadrate der Zwerch-Axe, wie das Quadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerch-Axe.

Ppp pp 3

Die

Die 95. Aufgabe.

Tab. III.
Fig. 33.

270. Es seyn zwei Hyperbeln von gleicher Grösse, die also einen Parameter, eine Zwerch-Axe und eine kleine Axe haben, einander entgegen gesetzt, in der Weite ihrer Zwerch-Axe AB. Zieheth aus beyden Brenn-Puncten E und F, gegen einen Punct einer Hyperbel M, zwei gerade Linien EM und FM. Ihr sollet ihre Grösse finden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $EC = FC = e$; so ist $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$, $Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$. Nun ist (§. 266. $CD^2 = ee - \frac{1}{4}aa$, und (§. 268, 269) $AC^2 : CD^2 = AP : PB : PM^2$, das ist, $\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$, folglich $1 : 4cc - 1 = \frac{ax + x^2}{PM^2}$.

$$ax + x^2 : PM^2.$$

Demnach ist:

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4ccxx : a^2$$

$$PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$$

$$FM^2 = cc - 2cx - ac + \frac{1}{4}aa + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a.$$

Wiederum :

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$$

$$fM^2 = cc + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

fM

$$\begin{aligned} fM &= c + \frac{1}{2}a + 2cx : a \\ FM &= c - \frac{1}{2}a + 2cx : a \\ \hline fM - FM &= a = AB. \end{aligned}$$

Zusatz.

271. Hieraus fließt folgende Manier, die Tab. IV. Hyperbel zu beschreiben. Auf eine gerade Fig. 33. Linie ZX traget die Zwerch-Axe AB, und aus A in F, ingleichen aus B in f, die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMC, und mit seinem andern Ende an das eine Ende eines Lineals fC, welches um die Zwerch-Axe AB länger als der Faden ist. Hängt das Lineal mit dem andern Ende an den Nagel in f. Drückt den Faden mit einem Stifte an das Lineal und schiebet es fort; so wird er die Hyperbel beschreiben.

Anders.

Traget auf eine gerade Linie die Zwerch-Axe AB, und ferner aus B in f und aus A in F die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Zieheth aus f nach Gefallen die Linie fVII, und traget aus f in L die Länge der Zwerch-Axe BA. Beschreibet aus f, mit beliebiger Eröffnung des Circuls die Bogen 1.1, 2.2, 3.3, u. s. w. und durchschneidet sie aus F

P p p p 4

mit

mit LI, LII, LIII u. s. w. in 1. 2. 3. u. s. w.
so sind die Punkte 1, 2, 3 c. in der Hyperbel.

Die 28. Erklärung.

Tab. IV. 272. Wenn ihr die kleine Ase DE an
Fig. 34. die Scheitel der Hyperbel A rechtwink-
licht seget, und aus dem Mittelpuncte C
durch ihre beyden Enden D und E die ge-
raden Linien CR und Cr ziehet; so wer-
den dieselben die Asymptoten genennet.

Der 1. Zusatz.

273. Weil $CA:AE = CP:Pr$, und $CA:DA (= AE) = CP:PR$ (§. 185 *Geom.*); so ist $PR = Pr$ (§. 71 *Arithm.*), folglich, da $PM = Pm$, auch $MR = mr$ (§. 31 *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

274. Wenn AI mit CR parallel gezogen wird; so ist $EA:ED = AI:DC$ (§. 184 *Geom.*), folglich, da $EA = ED$ (§. 272), auch $AI = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} CE$. Weil nun ferner $EA:ED = EI:EC$ (§. 184 *Geom.*), und daher, weil $EA = ED$, auch $EI = \frac{1}{2} CE = CI$; so ist auch $AI = CI$ (§. 28 *Arithm.*).

Die 29. Erklärung.

275. Das Quadrat der Linie AI oder CI wird die Potenz der Hyperbel genennet.

Die

Die 96. Aufgabe.

276. Die Gröſſe der Potenz der Hyperbel zu finden.

Auflösung.

Es ſey $CA = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}c$; ſo iſt $CE = \sqrt{\text{Tab. IV.}}$
 $(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)$ (§. 172 *Geom.*), und daher $CI = \frac{1}{2}\sqrt{\text{Fig. 34.}}$
 $(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)$: ſolaliſch $CI^2 = (a^2 + c^2) : 16$, nemlich,
 die Potenz der Hyperbel iſt dem vierten
 Theile der Quadrate der beyden halben
 Axen gleich.

Die 97. Aufgabe.

277. Den Unterſcheid zwischen den
 Quadraten PM und PR zu finden.

Auflösung.

Weil $CA : DA = CP : PR$ (§. 184 *Geom.*), Tab. IV.
 und $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 262), $CP = \frac{1}{2}a + x$, ſo Fig. 34.
 findet ihr $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$
 $+ 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Derowegen iſt:

$$\begin{array}{l} PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bxx : a \\ PM^2 = \quad \quad bx + bxx : a \quad (\S. 261) \\ \hline PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2. \end{array}$$

Zuſatz.

278. Wenn ihr ſehet, daß die Hyperbel
 mit ihrer Aſymptote zuſammenſtoſſe, ſo
 fällt der Punct R auf M, und iſt $PR = PM^2$,
 Ppp pp 5 folg=

folglich $PR^2 - PM^2 = 0$. Allein $PR^2 - PM^2 = DA^2$. Darum ist $DA^2 = 0$. Da nun dieses ungereimt ist, so kan die Asymptote mit der Hyperbel niemals zusammen kommen.

Die 98. Aufgabe.

Tab. IV. 279. Die Gröſſe des Rectanguli aus
Fig. 34. MR in Mr zu finden.

Auflösung.

Es ſey $PR = c$, $MP = y$, ſo iſt $MR = c - y$, $mR = y + c$, folglich MR. mR $= c^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$, nemlich:

Das Rectangulum aus MR in mR iſt gleich der Differenz der Quadrate von PR und PM.

Zuſatz.

280. Weil $PR^2 - PM^2 = DA^2$ (§. 277), ſo iſt mR. MR $= DA^2$.

Die 99. Aufgabe.

Tab. IV. 281. Wenn QM und Sm mit der einen
Fig. 34. Asymptote Cr, hingegen qm und SM mit der andern CR parallel gezogen wird, die Verhältniß der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zu finden.

Auflösung

Es ſey $RM = mr = a$, $Rm = rM = b$, $MQ = v$, $mq = z$. Nun iſt (§. 184 Geom.).

RM

$$\begin{aligned} RM : MQ &= Rm : mf \\ a : v &= b : (bv : a) \\ rm : mq &= rM : MS \\ a : z &= b : (bz : a). \end{aligned}$$

Derwegen ist $MQ \cdot MS = bvz : a$, und $mq \cdot mf = bvz : a$, folglich $MQ \cdot MS = mq \cdot mf$.
das ist:

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in mf sind einander gleich.

Die 100. Aufgabe.

282. Die Verhältniß des Rectanguli Tab. IV. aus qm in mf zu der Potenz der Hyperbel Fig. 34. zu finden.

Auflösung.

Es sey $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$; so sind, wegen der parallel-Linien AE und Pr, die Winkel CEA und qrm, und wegen der Parallelen AI und qm, die Winkel AIE und mqr einander gleich (§. 97 Geom.), folglich (§. 183 Geom.).

$$\begin{aligned} mr : qm &= AE : AI \\ z : y &= c : (cy : z). \end{aligned}$$

Wiederum, weil $mR \cdot mr = AE^2$ (§. 280); so ist (§. 137).

$$\begin{aligned} mr : AE &= AE : mR \\ z : c &= c : (c^2 : z). \end{aligned}$$

Endlich, wegen der parallel-Linien fm und CE,

CE, ist $o=x$, und wegen der Parallelen DE und Rm, $x=y$ (§. 97 Geom.), folglich $o=y$ (§. 28 Arithm.). Wegen der Parallelen AI und CR aber, ist $IAE=CDE$, und wegen der Parallelen DE und Rm, $CDE=fRm$ (§. 28 Arithm.). Daher (§. 183 Geom.).

$$AE : IE = mR : fm$$

$$c : \frac{cy}{z} = \frac{cc}{z} : \frac{c^2y}{z^2}$$

Solchergestalt ist $fm \cdot qm = c^2y^2 : z^2$. Da nun auch $AI^2 = c^2y^2 : z^2$; so ist $fm \cdot qm = AI^2$, das ist:

Das Rectangulum aus fm , oder Cq , in qm ist der Hyperbel gleich.

Der 1. Zusatz.

Tab. IV. 283. Es sey $CI=AI=a$, $Cq=x$, $qm=y$; so ist $xy=a^2$ die Gleichung, welche die Natur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten erklärt.

Fig. 34.

Der 2. Zusatz.

Tab. IV. 284. Wenn demnach die Asymptoten BA und AC nebst der Potens der Hyperbel DE^2 gegeben werden: so könnet ihr die Hyperbel beschreiben. Ziehet nemlich durch E die Linie FG mit AC, und PN mit DE parallel. Ziehet ferner aus A in N eine gerade Linie AN, und

Fig. 35.

und HM mit AC parallel; so ist der Punct M in der Hyperbel. Denn $AP:PN=AD:DH$ (§. 187 Geom.), das ist, weil $PN=DE$, und $PM=DH$, auch (§. 275) $ED=DA$, $AP:DE=AD:PM$

$$x:a=a:y$$

folglich $\frac{x}{a} = \frac{a}{y}$

$$a^2=xy.$$

Der 3. Zusatz.

285. Die Gleichung für unendliche Hyperbeln ist $a^{m+n}=x^m y^n$.

Anmerkung.

286, Eben so könnet ihr eine Gleichung für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Aye finden $ay^{m+n}=ax^m(a+x)^n$, deren Beschreibung Intieret in aditu ad nova arcana Geometrica deregenda lehrret pag. 36. & seq. Es ist aber zu mercken, daß nach seiner Manier die Hyperbeln von einem höhern Geschlechte niemals beschrieben werden können, man habe denn zuvor alle niedrigere beschrieben. Eine andere leichtere Manier zeige ich in den Actis Eruditorum A. 1717.

Der 4. Zusatz.

287. Wenn ihr wie vorhin $AD=DE=a$, Tab. IV. $AI=b$, $IP=x$, $PM=y$ sehet; so ist $AP=b$ Fig. 35. $+x$, folglich $a^2=by+xy$.

Die 30. Erklärung.

288. Eine gleichseitige Hyperbel wird Tab. IV. genennet, in welcher die beyden Aren AB Fig. 34. und DE einander gleich sind.

Der 1. Zusatz.

289. Also ist auch der Parameter der Aye AB gleich (§. 262). Der

Der 2. Zusatz.

290. Wenn man in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx \mp bx^2 : a$ demnach $a = b$ setzt, so kommt die Gleichung für die gleichseitige $y^2 = bx \mp x^2$.

Der 3. Zusatz.

Tab. IV. 291. Weil $CA = AE$; so ist der Winkel
Fig. 34. $ACE 45^\circ$, folglich der Asymptoten-Winkel RCr ein rechter Winkel.

Anmerkung.

292. Damit nun erhelle, daß die Parabel, Ellipsis und Hyperbel aus einem Kegel sich schneiden lassen, und also die Kegelschnitte der Alten sind; so will ich folgende drey Aufgaben noch hinzusetzen.

Die 101. Aufgabe.

Tab. IV. 293. Die Natur der krummen Linie
Fig. 36. zu finden, welche herauskommt, wenn man den Kegel ABC dergestalt schneidet, daß die Are des Schnittes DE mit der Seite des Kegels CA parallel ist.

Auflösung.

Es sey HI mit AB , und PM mit EN parallel, $AE = HP = v$, $SI = t$, $DP = x$, $DE = z$; so ist (§. 184 Geom).

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : (t + zx)$$

und $PM^2 = HP \cdot PI$ (§. 198) $= tv$, $EN^2 = AE \cdot EB = tv : x$ (§. cit.), folglich:

PM^2

$$\begin{aligned} PM^2:EN^2 &= tv:(tzu:x) \\ &= x:z \quad (\S. 144) \\ &= DP:DE. \end{aligned}$$

Solchergestalt ist DLN eine Parabel (§. 231).

Die 102. Aufgabe.

294 Die Natur der krummen Linie Tab. IV. zu finden, welche entsteht, wenn ein Arcus BCA dergestalt geschnitten wird, daß die Arc des Schnittes DE den Diameter der Grundfläche AB durchschneidet, wenn sie beyde verlängert werden. Fig. 37.

Auflösung.

Es sey $DE=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$, $QL=f$; so ist $PE=a-x$, $QE=a-v$, und weil IH mit LK parallel,
 $DP:PH=DQ:QK$ (§. 184 Geom.)
 $x:t=v:(vt:x)$
 $EQ:QL=EP:PI$
 $a-v:s=a-x:af-fx.$

Demnach ist $PM^2=HP \cdot PI=(tfa-tfx):(a-v)$, und $QN^2=KQ \cdot QL=vtf:x$ (§. 198), folglich

$$\begin{aligned} PM^2:QN^2 &= \frac{tfa-tfx}{a-v} : \frac{vtf}{x} \\ &= ax-x^2:av-v^2 \quad (\S. 144). \end{aligned}$$

Solchergestalt ist die Linie DLEND eine Ellipsis (§. 250).

Die

Die 103. Aufgabe.

Tab. IV. 295. Die Natur der krummen Linie
Fig. 38. zu finden, welche entsteht, wenn ein
Kegel ACB dergestalt geschnitten wird,
daß die Are des Schnittes DQ die Seite
des Kegels AC schneidet, wenn beyde
verlängert werden.

Anmerkung.

Es sey $ED=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$,
 $PI=f$; so ist $EP=a+x$, $EQ=a+v$, und
(§. 184 Geom.).

$$\begin{aligned} EP : PH &= EQ : AQ \\ a+x : t &= a+v : \frac{at+tv}{a+x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP : PI &= DQ : QB \\ x : f &= v : (fv:x). \end{aligned}$$

Demnach ist $PM^2=HP \cdot PI=tf$, und QN^2
 $=AQ \cdot QB=(atv+v^2t):(ax+x^2)$ (§. 198),
folglich:

$$\begin{aligned} PM^2 : QN^2 &= tf : \frac{atv+v^2t}{ax+x^2} \\ &= ax+x^2 : av+v^2. \end{aligned}$$

Solchergestalt ist die Linie DLNMD eine
Hyperbel (§. 267).

Die 31. Erklärung.

296. Es sey eine gerade Linie BD, wel-
che

che mitten in E von einer andern AC recht-
winklicht durchschnitten wird. Ziehet
aus C durch DB so viel gerade Linien, als
ihr wollet, und machet überall $QM = EA$.
Die Linie, welche durch alle Punkte M ge-
het, ist die Muschel-Linie (CONCHOIS Tab. V.
oder CONCHILIS) des Nicomedis. Fig. 32.
Vergleichen Linie entstehet auch unten,
wenn man überall $QN = EF$ macht.

Der 1. Zusatz.

297. Weil QM mit DB immer einen schie-
feren Winkel macht, je weiter sie von EA
wegkommt; so muß die Conchois der gera-
den Linie DB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

298. Doch, weil QM niemals zu einem
Punkte werden kan, sondern vielmehr immer
einerley Länge behält; so können auch die
Punkte Q und M niemals zusammen stoßen,
folglich kan die Conchois niemals mit der Li-
nie DB zusammen kommen. Und also ist
DB ihre Asymptote.

Die 104. Aufgabe.

299. Eine Gleichung zu finden, welche
die Natur der Muschel-Linie erkläret.

Auflösung.

Es sey $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = E$
 $P = x$, $ER = PM = y$; so ist $CP = b + x$,
und (S. 184 Geom.)

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) $\Delta q q q q$ PE

$$PE:MQ=EC:CQ$$

$$x:a=b:(ab:x).$$

Daher $CM = a + ab:x = (ax + ab):x$,
 folglich, weil $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 172
Geom.), $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx +$
 $a^2x^2):x^2$ das ist, $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 =$
 $a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, welche Gleichung die
 Natur der oberen Muschel-Linie MAM er-
 kläret.

Es sey $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$,
 $GN = EO = y$, so ist $GC = b - x$, und
 (§. 184 *Geom.*).

$$EG:QN = GC:CN$$

$$x:a = b-x:(ab-ax):x.$$

Daher, weil $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 172
Geom.), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2):x^2 = b^2 -$
 $2bx + x^2 + y^2$, das ist, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2$
 $= b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$, welche Gleichung
 die Natur der untern Muschel-Linie NFN
 erkläret.

Die 32. Erklärung.

Tab. IV. 300. Wenn man die Semiordinaten
 Fig. 40. des Circuls PM verlängert, und auf die
 Sehnen AM den Perpendicul AN auf-
 richtet, welche sie in N durchschneiden;
 so kommt die krumme Linie heraus, wel-
 che *Diocles* vor diesem *GISSOIDE M* ge-
 nennet hat.

Der

Der 1. Zusatz.

301. Weil $PB:PM=PM:PA$ und $PM:PA=PA:PN$ (S. 210 Geom.); so sind die vier Linien BP , PM , AP und PN in einer stetigen Proportion.

Der 2. Zusatz.

302. Es sey $AB=a$, $PN=y$, $AP=x$, $PB=a-x$. Da nun (§. 301, 142).

$$BP^2:PM^2=AP^2:PN^2$$

$$\text{so ist } a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$\text{das ist } a - x : x = x^2 : y^2$$

$$\text{folglich } x^3 = ay^2 - xy^2$$

$$\text{oder } y^2 = x^3 : (a - x).$$

Der 3. Zusatz.

303. Wenn $x=a$, und also $BD=y$, so ist $a^3=ay^2$, folglich $0:1=a^3:y^2$, und demnach BD , in Ansehung AB , unendlich groß, das ist, die Asymptote von der Cissoide.

Die 33. Erklärung.

304. Theilet einen Quadranten eines Tab. V. Circuls ABC in so viele gleiche Theile, als Fig. 41. euch beliebt. In eben so viele Theile theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u. s. w. Richtet aus diesen Puncten perpendicular-Linten auf, und ziehet aus dem Mittel-Puncte A in die Theilungspuncte des Bogens die Linien A_1, A_2, A_3
 $Qqq qq a$ u. s. w.

u. f. w. welche die perpendicular-Linien in a. b. c. d. e. durchschneiden. Die krumme Linie, welche durch die Puncte a. b. c. &c. gehet, wird die *QUADRATRIX* des *Dinostratis* genennet.

Zusatz.

305. Derowegen ist allezeit, wie der ganze Bogen BC zu dem Bogen C4, so AB zu AIV. Es sey $BC = b$, $AB = a$, $C4 = x$, $AIV = y$, so ist $ax = by$.

Die 34. Erklärung.

Tab. V.
Fig. 42.

306. Theilet eine Linie Ap in lauter gleiche Theile, und richtet aus den Theilungs Puncten A, P, p 2c. perpendicular-Linien auf AN, PM, pm 2c. welche in einer geometrischen Proportion abnehmen. Die krumme Linie, welche durch die Puncte N, M, m 2c. gehet, wird die logarithmische genennet.

Zusatz.

307. Es sind demnach die Abscissen AP die Logarithmi der Semiordinaten PM (§. 21 *Trigon.*).

Anmerkung.

308. *Hugenius* hat zu Ende seines Discurses für la pelanteur verschiedene Eigenschaften dieser Linie beschrieben, welche *Guido Grandus* in einem besondern Buche demonstriret, welches er unter dem Titel, *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenia-norum circa logisticam, seu logarithmicam Lineam*, zu Florenz 1701 in 4 herausgegeben hat. Es könn-
nen noch andere Arten der logarithmischen Linien
erdacht

Tab. V.
Fig. 43.

erdacht werden. So hat man eine logarithmische Spiral-Linie erfunden, in welcher der Quadrant AB in gleiche Theile getheilet wird, und aus dem Mittel-Puncte C gegen die Theilungs-Puncte des Bogens die Radii CI. CII. CIII. &c. gezogen, von ihnen aber in geometrischer Proportion die Linien C1. C2. C3. &c. abgeschnitten werden, durch deren Ende 1. 2. 3. 4c. die verlangte Linie gehet.

Die 35. Erklärung.

309. Wenn sich ein Circul an einer Linie AC fort bewegt, bis er sich ganz überworfen hat, so beschreibt der Punct a die Linie ABC, welche *CYCLOIS* oder die Rad-Linie genennet wird. Tab. V. Fig. 44.

Zusatz.

310. Es ist also die Linie AC der Peripherie des Circuls, und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogen Ma gleich. Denn die gerade Linie Ad ist dem Bogen Pd, und daher der übrige Bogen Pb, folglich auch der Bogen BM, der Linie dD gleich. Nun ist $OD = ML$ (§. 22 Geom.) $= PN$ (§. 122 Geom. I. 2 Trig.). Deromwegen, da $NM = dO$, so ist auch $PN + MN = Od + OD$, das ist, $PM = dD$. Folglich ist die Semiordinate PM dem Bogen Pb, oder ihrer Abscisse BM gleich.

Die 36. Erklärung.

311. Wenn die Peripherie des Circuls APA in gleiche Theile getheilet wird, und man den Radium CA in eben so viele Theile theilet, nach diesem CM einem, Cm zweyen 2c. solchen Theilen gleich macht; Tab. IV. Fig. 39.

299 99 3

so

so sind die Puncte M, m &c. in der Spiral-Linie des *Archimedis*. Diese Linie kan nach Gefallen unendlich verlängert werden, durch Hülfe neuer Circul, welche mit dem zweyfachen, dem dreyfachen &c. Radio beschrieben werden.

Zusatz.

312. Es sey die Peripherie $= p$, $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$; so ist $CM = r - y$, folglich $pr - py = rx$. Wenn aber $CM = y$; so ist $py = rx$, und demnach für unendliche Spiral-Linien $r^nx^m = p^ny^m$.

Anmerkung.

313. Bisher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erklärt, und bey allerhand Aufgaben angebracht. Nun will ich die übrigen vornehmen, welche man in Auflösung der höheren Gleichungen vorndthen hat.

Von der Natur der Gleichungen.

Die 37. Erklärung.

314. Die Wurzel ist der Werth der unbekannten Gröſſe in einer Gleichung. Und ist eine wahre Wurzel, wenn sie das Zeichen $+$ hat. Z. E. wenn $x = +3$; hingegen eine falsche Wurzel, wenn sie das Zeichen $-$ hat. Z. E. wenn $x = -3$.

Die 105. Aufgabe.

315. Die Natur der Gleichungen und ihre vornehmsten Eigenschaften zu untersuchen.

Auf

Auflösung.

1. Nehmet so viele Werthe von x an, als euch beliebt, formiret daraus einfache Gleichungen, und bringet sie auf 0.
2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander, so werden die höheren heraus kommen, deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbaren wird.

<p>Es sey $x=2$</p> <p>$x=-3$</p> <p>$x=4$</p> <p>so ist $x-2=0$</p> <p>$x+3=0$</p> <p>$x-4=0$</p> <p>$x-2=0$</p> <p>$x+3=0$</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p style="text-align: center;">$+ 3x - 6$</p> <p>$x^2 - 2x$</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>$x^2 + x - 6 = 0$</p> <p>$x - 4 = 0$</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p style="text-align: center;">$- 4x^2 - 4x + 24$</p> <p>$x^3 + x^2 - 6x$</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>$x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$</p>	<p>$x=a$</p> <p>$x=-b$</p> <p>$x=c$</p> <p>$x-a=0$</p> <p>$x+b=0$</p> <p>$x-c=0$</p> <p>$x-a=0$</p> <p>$x+b=0$</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p style="text-align: center;">$x^2 + bx - ab = 0$</p> <p style="text-align: center;">$- ax$</p> <p>$x - c = 0$</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p style="text-align: center;">$x^3 + bx^2 - abx + abc = 0$</p> <p style="text-align: center;">$- ax^2 - bcx$</p> <p style="text-align: center;">$- cx^2 + acx.$</p>
---	---

Wenn ihr diese Gleichungen (welche ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem *Harriot* und *Cartesio* wahrnehmen:

Q. q q q q 4

1. Die

1. Die bekannte Gröſſe des andern Gliedes ſey die Summe aller Wurzeln mit einem niedrigen Zeichen; des dritten Gliedes die Summe der Producte aus zwey in zwey Wurzeln; des vierten die Summe der Producte aus drey in drey Wurzeln ꝛc. endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln mit einand ꝛ. Z. E. in der quadratiſchen Gleichung iſt die bekannte Gröſſe des andern Gliedes $+1$, die Wurzeln ſind $+2$ und -3 .
2. Eine jede Gleichung habe ſo viele Wurzeln, als das erſte Glied Abmeſſungen hat, oder der Exponent der Dignität deſſelben Gliedes Einheiten in ſich begreift. Z. E. in der quadratiſchen Gleichung iſt der Exponent 2, die Zahl der Wurzeln iſt auch 2.
3. Und zwar ſeyn in jeder Gleichung ſo viele wahre Wurzeln, als Abwechſlungen der Zeichen ſind; ſo viel falſche, als einerley Zeichen aufeinander folgen. Z. E. in unſerer quadratiſchen Gleichung, welche eine wahre Wurzel $+2$ und eine falſche -3 hat, folgen aufeinander $++$, und wechſeln ab $+-$. In der cubiſchen, welche zwey wahre Wurzeln $+2$ und $+4$ und eine falſche -3 hat, wechſeln anfangs $++$, darauf folgen auf einander $+-$, und abermals wechſeln ab $+-$.

Die

Die 1. Anmerkung.

316. Der erste und andere Satz läßt sich gar leicht aus der Art, wie die Gleichungen entstehen demonstrieren, so, daß ich es für unnöthig achte, den Beweis hieher zusetzen. Allein den dritten, welchen *Harriot* zuerst durch vielen Versuch gefunden, hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können, daher ihn auch *Reynault* aus seiner Analyse démonstré gar weggelassen hat, weil er die Regeln der Algebra hat demonstrieren wollen.

Die 2. Anmerkung.

317. Ihr dürft euch nicht wundern, daß eine einzige Gleichung so gar verschiedene Wurzeln haben kan. Denn es ist zu wissen, daß eine einzige Aufgabe öfters verschiedene Fälle haben kan, und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen: wie wir Exempel von der quadratischen Gleichung gehabt haben, in welcher einerley Gleichung herauskommt, ob man die eine oder die andere von den gesuchten Größen x nennet. Doch, weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden, so muß auch die Gleichung unmögliche Wurzeln haben. Wie viele aber in jedem Falle unmögliche Wurzeln sind, hat zwar *Newton* in seiner *Arithmetica universalis* p. 212. zuzeiten einigermaßen sich bemühet; doch, weil weder die Regel allgemein ist, noch auch er die Demonstration hinzu setzt, so wollen wir uns damit nicht aufhalten, zumal, da man sie auch in den *Leipziger Actis* A. 1708 p. 522, 523. findet.

Die 106. Aufgabe.

318. Die Wurzel einer gegebenen Gleichung um eine gegebene Gröſſe zuvermehrén oder zuvermindern, unerachtet man sie noch nicht erkannt hat.

Auflösung.

Es sey die gegebene Aequation $x^3 - 6x^2$

299 99 5

413

$\mp 13x - 10 = 0$. Ihr sollt die Wurzel um 3 vermehren. Sehet

$$\begin{array}{r} x + 3 = y \\ \text{so ist } x = y - 3 \\ x^2 = y^2 - 6y + 9 \\ \hline x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ - 6x^2 = - 6y^2 + 36y - 54 \\ \mp 13x = \quad \quad \mp 13y - 39 \\ - 10 = \quad \quad \quad - 10 \end{array}$$

$$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0.$$

Eine neue Gleichung, worinnen $y = x + 3$.

Wenn ihr in der Gleichung die Wurzel um 3 vermindern sollt, so sehet:

$$\begin{array}{r} y - 3 = x \\ \text{so ist } y = x + 3 \\ y^2 = x^2 + 6x + 9 \\ \hline y^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \\ - 15y^2 = - 15x^2 - 90x - 135 \\ \mp 76y = \quad \quad \mp 76x + 228 \\ - 130 = \quad \quad \quad - 130 \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0.$$

Eine neue Gleichung, worinnen $x = y - 3$.

Die 107. Aufgabe.

319. Die Wurzel in einer Gleichung durch eine gegebene Grösse zumultipliciren.

Auf:

Auflösung.

Ihr sollt in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ die Wurzel durch a multipliciren. Setzt:

$$\begin{array}{rcl}
 ax & = & y \\
 \hline
 \text{so ist } x & = & y : a \\
 x^2 & = & y^2 : a^2 \\
 \hline
 x^3 & = & y^3 : a^3 \\
 -px^2 & = & -py^2 : a^2 \\
 +qx & = & +qy : a \\
 -r & = & -r \\
 \hline
 y^3 : a^3 - py^2 : a^2 + qy : a - r & = & 0 \\
 a^3 \quad \quad \quad \hline
 y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r & = & 0, \text{ eine neue} \\
 \text{Gleichung, in welcher } y & = & ax.
 \end{array}$$

Zusatz.

320. Hieraus erhellet, daß ihr nur die vorgegebene Gleichung durch eine geometrische Progression multipliciren dürft, deren erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige Zahl ist, durch welche die Wurzel multiplicirt werden soll. Z. E. Es soll in der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ die Wurzel durch 2 multiplicirt werden: so verfähret also:

x^4

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0 \\
 \begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \\
 \hline
 \end{array} \\
 y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0 \text{ eine Gleichung, worinnen } y = 2x.
 \end{array}$$

Wiederum, es soll in der Gleichung $x^4 + qx^2 - rx - f = 0$ die Wurzel durch c multipliziert werden. Verfahret also:

$$\begin{array}{r}
 x^4 * + qx^2 - rx - f = a \\
 \begin{array}{cccccc}
 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 & \\
 \hline
 \end{array} \\
 y^4 * + c^2 q y^2 - c^3 r y - c^4 f = 0 \text{ eine neue Gleichung, worinnen } y = cx.
 \end{array}$$

Anmerkung.

321. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzt, welche fehlen.

Die 108. Aufgabe.

322. Die Wurzel in einer gegebenen Gleichung durch eine gegebene GröÙe zu dividiren.

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Die Wurzel soll durch a dividirt werden. Setzet:

$$x : a$$

$$\begin{array}{r}
 x : a = y \\
 \hline
 \text{so ist } x = ay \\
 x^2 = a^2 y^2 \\
 \hline
 x^3 = a^3 y^3 \\
 - px^2 = \quad - a^2 p y^2 \\
 + qx = \quad + a q y \\
 - r = \quad - r \\
 \hline
 a^3 y^3 - a^2 p y^2 + a q y - r = 0 \\
 \hline
 y^3 - p y^2 : a + q y : a^2 - r : a^3 = 0.
 \end{array}$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x : a$.

Zusatz.

323. Hieraus erhellet, daß ihr die vor-
gegebene Gleichung nur durch eine geome-
trische Progression dividiren dürfet, deren
erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige
Größe ist, wodurch die Division geschehen
soll. Z. E. Die Wurzel von $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ soll durch 2 dividirt
werden. Verfahret also:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0 \\
 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \\
 \hline
 y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0.
 \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen $y = \frac{1}{2}x$.

Wie

Wiederum, es soll die Wurzel von $x^3 - 36x - 54 = 0$ durch 3 dividirt werden. Verfähret also:

$$\begin{array}{r} x^3 * - 36x - 54 = 0 \\ 1 \quad 3 \quad \quad 9 \quad 27 \\ \hline y^3 - \quad 4y - 2 = 0, \text{ eine neue Gleichung, worinnen } y = \frac{1}{3}x. \end{array}$$

Die 109. Aufgabe.

324. Eine Gleichung, in welcher einige Glieder fehlen, vollständig zumachen.

Auflösung.

Vermehret die Wurzel um so viel, als ihr wollet, oder vermindert sie (§. 318): so ist geschehen, was man verlangte.

3. E. Es sey $x^3 * - 23x - 70 = 0$.
Setzet:

$$\begin{array}{r} x + 1 = y \\ \text{so ist } x = y - 1 \\ x^2 = y^2 - 2y + 1 \\ \hline x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ - 23x = \quad - 23y + 23 \\ - 70 = \quad \quad - 70 \\ \hline y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen kein Glied fehlet, und $y = x + 1$.

Die

Die 110. Aufgabe.

325. Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied wegzuschaffen.

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen + hat, so vermehret; hat es aber das Zeichen —, so vermindert die Wurzel (§. 318) durch den Quotienten, welcher herauskommt, wenn man die bekannte Größe des andern Gliedes durch den Exponenten des ersten dividirt.

Z. E. Ihr sollt aus der Gleichung $x^3 - 8x - x + 8 = 0$ das andere Glied wegnehmen.

Setzt $x - 8 : 3 = y$

so ist $x = y + 8 : 3$

$$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$$

$$\begin{array}{r} x^3 = y^3 + 8y^2 + 192y : 9 + 512 : 27 \\ - 8x^2 = - 8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9 \\ - x = - y - 8 : 3 \\ + 8 = + 8 \\ \hline y^3 + - 67y : 3 - 880 : 27 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen das andere Glied fehlet, und $y = x - 8 : 3$.

Zusatz.

326. Wenn ihr also aus einer quadratischen Gleichung das andere Glied wegnehmet;

met; so könnet ihr solche noch auf eine andere Art, als vorhin (§. 83) geschehen ist, auflösen. 3. E.

Es sey $x^2 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$; so ist $x = y + 4$

$$\begin{array}{r} x^2 = y^2 + 8y + 16 \\ - 8x = - 8y - 32 \\ + 15 = + 15 \\ \hline y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

$y = 1$
folglich $x = 1 + 4 = 5$.

Die III. Aufgabe.

327. Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Multipliziret die Wurzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche, oder eine Zahl, durch welche sich die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen, was man verlangte.

Exempel.

$$\begin{array}{r} y^3 * - 67y : 3 - 880 : 27 = 0 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ x^3 * - 201x - 880 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, in welcher $x = 3y$.

x^3

$$\begin{array}{r} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 64 = 0 \\ 1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728 \end{array}$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = 12x$.

Die 112. Aufgabe.

328. Aus einer gegebenen Gleichung die irrational-Größen zuschaffen.

Auflösung.

Unterweilen kan solches durch die Multiplikation; zuweilen durch die Division geschehen. Keine Regel ist allgemein.

$$\begin{array}{r} x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0 \\ 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4 \end{array}$$

$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{r} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0 \\ 1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4 \end{array}$$

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0.$$

Eine neue Gleichung, welche ganz rational ist, und deren Wurzel $y = x\sqrt[3]{4}$.

$$\begin{array}{r} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0 \\ 1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2 \end{array}$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}aab = 0.$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Rrr. rr Ei

Eine neue Gleichung, welche ganz rational ist, und deren Wurzel $y = x : \sqrt[3]{2}$.

Anmerkung.

329. Alles, was bisher von den Gleichungen gelehrt worden, ist zu dem Ende geschehen, damit wir sie völlig auflösen, das ist, den Wehrt der uns bekannten Größe so wohl geometrisch, als in Zahlen finden könnten, welches nun im folgenden gezeigt werden soll.

Die 113. Aufgabe.

330. Alle rationalen Wurzeln, welche in einer gegebenen Gleichung enthalten sind, zu finden.

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurzeln ist (§. 315); so zerfällt es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entsteht, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. und machet daraus folgende einfache Gleichungen: $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$ u.
2. Dividiret die gegebene Gleichung durch diese einfachen, denn durch welche sie sich dividiren läßt, die zeigen ihre rationalen Wurzeln (§. 315). Als $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ läßt sich dividiren durch $x + 3$, deswegen ist -3 eine falsche Wurzel von dieser Gleichung. Der Quotient, welcher heraus kommt $x^2 - 6x + 8 = 0$, läßt sich

fer-

ferner dividiren durch $x - 2$, und der neue Quotient ist $x - 4$. Derowegen sind 2 und 4 zwei wahre Wurzeln von der gegebenen Gleichung.

Anderß.

Ihr dürfet auch nur die Zahlen, in welche das letzte Glied zerfällt worden ist, nach einander in die Stelle vor x setzen: denn, wenn dadurch die ganze Gleichung zernichtet wird, so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren rational-Wurzeln (§. 315). Z. E. Es sey $x^2 - 6x + 8 = 0$. Das letzte Glied 8 entsteht, wenn ihr 2 durch 4 multipliciret.

$$\begin{array}{r} \text{Setzet, } 4 = x \\ \hline \text{so ist } 16 = x^2 \\ - 24 = - 6x \\ + 8 = + 8 \\ \hline 0 = 0. \end{array}$$

Solchergehalt ist $+ 4$ eine von den rational-Wurzeln.

Die I. Anmerkung.

331. Weil in der ersten Manier das viele Dividiren beschwerlich fallen würde, so hat man diesen Vortheil ausgedacht. 1) Zieheth die Zahl, welche ihr versuchen wollet, von der bekannten Zahl des andern Gliedes ab, und was herauskommt, multipliciret durch eben selbige Zahl. 2) Das Product ziehet von der bekannten Zahl in dem dritten Gliede ab, und was überbleibt, multipliciret abermal durch mehr gedachte Zahl. 3) Das neue Product ziehet von dem vierten Gliede ab, u. s. w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibt, so ist die versuchte Zahl

N r r r r 2

eine

eine von den rational-Wurzeln. 3. E. Ihr suchet die rational-Wurzeln von $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Das letzte Glied 15 läßt sich in 1. 3. 5. 15 zerfallen. Wenn ihr versuchen wollet, ob einige darunter von den Wurzeln seyn, so geschieht es folgendergestalt:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \\ \underline{-1 \quad +2 \quad +15} \\ -2 \quad -15 \quad 0 \\ \underline{+2 \quad +15} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \\ \underline{+3 \quad +18 \quad +15} \\ -6 \quad +5 \quad 0 \\ \underline{+3 \quad +3} \\ -18 \quad -15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \\ \underline{-5 \quad -10 \quad +15} \\ +2 \quad -3 \quad 0 \\ \underline{-5 \quad -5} \\ -10 \quad +15 \end{array}$$

Also ist $x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, das ist, 1 und 5 sind die beyden wahren Wurzeln, 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerkung.

332. Damit ihr aber sehet, daß dieser Vortheil aus der ersten Manier völlig genommen, und für keine besondere zu halten sey, so will ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen.

$x -$

$$\begin{array}{r}
 x-1 \left\{ \begin{array}{l} x^3-3x^2-13x+15=0 \\ x^3-x^2 \end{array} \right. = 0 \left\{ \begin{array}{l} x^2-2x-15 \\ \end{array} \right. \\
 \hline
 -2x^2-13x \\
 -2x^2+2x \\
 \hline
 -15x+15 \\
 -15x+15 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Die 114. Aufgabe.

333. Die Schranken zu finden, zwischen welchen die Grösse der Wurzeln enthalten ist.

Auflösung.

Es sey $x^3 - qx + r = 0$; so ist $x^3 + r = qx$, und demnach qx grösser als r , folglich x grösser, als $r:q$. Wiederum, qx ist grösser als x^3 , und daher q grösser als x^2 , folglich x kleiner, als \sqrt{q} . Die Schranken der Wurzeln in dem gegenwärtigen Falle sind also $r:q$ und \sqrt{q} .

Es sey $x^3 + qx - r = 0$, so ist $x^3 + qx = r$, und demnach qx kleiner als r , folglich x kleiner als $r:q$. Wiederum, r ist grösser als x^3 , und daher x kleiner als $r^{1/3}$, folglich $xr^{2/3}$ grösser als x^3 , und $xr^{2/3} + qx$ grösser als r , endlich x grösser als $r:(r^{2/3} + q)$. Also fällt die Grösse der Wurzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2/3} + q)$. Es sey $x^3 - px^2 + qx - r = 0$; so ist $x^3 - px^2 = r - qx$. Wenn nun x grösser als p , so ist auch

$px^2 - qx$ grösser als r

r größer als qx , und dannenhero x kleiner als $r:q$. Hingegen, wenn p größer als x ist, so ist qx größer als r , und dannenhero auch x größer als $r:q$. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = 0$; so ist $x^3 + r = px^2 + qx$, folglich $px^2 + qx$ größer als r , und daher auch $x^2 + qx : p + qq : 4pp$ größer als $r : p + qq : 4pp$, $x + q : 2p$ größer als $\sqrt{(r : p + qq : 4pp)}$, endlich x größer als $\sqrt{(r : p + qq : 4pp) - q : 2p}$. Wiederum $px^2 + qx$ ist größer als x^3 . Dannenhero $px + q$ größer als x^2 , und q größer als $x^2 - px$, das ist, $x^2 - px + \frac{1}{4}pp$ kleiner als $q + \frac{1}{4}pp$, $x - \frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$, endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$. Die Schranken also der Wurzeln sind $\sqrt{(r : p + qq : 4pp) - q : 2p}$ und $\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$.

Es sey $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$; so ist $x^4 - qx^2 = rx + s$. Demnach ist x^2 größer als q , weil sich qx^2 von x^4 abziehen läßt, und x größer als \sqrt{q} . Daher $x\sqrt{q}$ größer als q , und $x^3\sqrt{q}$ größer als qx^2 . Wiederum, weil $x^4 - rx = qx^2 + s$, so ist x^3 größer als r , und x größer als $r^{1:3}$, daher x^2 größer als $xr^{1:3}$, x^3 größer als $xr^{2:3}$, und $x^{3:1:3}$ größer als rx . Endlich, da $x^4 - s = qx^2 + rx$, so ist x^4 größer als s , und x größer als $s^{1:4}$, folglich x^3 größer als $s^{3:4}$, und $x^{3s^{1:4}}$ größer als s . Weil nun $x^4 = qx^2 + rx + s$, so ist x^4 kleiner als $x^3\sqrt{q} + x^3r^{1:3} + x^3s^{1:4}$, und deswegen x kleiner als $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.
Die

Die Schranken der Wurzel in dem gegenwärtigen Falle sind also \sqrt{q} oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2} \mp r^{1:3} \mp s^{1:4}$.

Eben so wird in andern Fällen verfahren.

Anmerkung.

334. Damit ihr die vorgeschriebene Manier besser fassen möget, so will ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z. E. Es sey $x^3 - 3x + 1 = 0$, so ist $q = 3$, und $r = 1$. folglich $r : q = 1 : 3$, und $\sqrt{q} = \sqrt{3}$. Solchergehalt sind die Schranken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{3}$, das ist, die Wurzel muß grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{3}$ sehn.

Zusatz.

335. Wenn ihr die Zahl wisset, welche grösser als eure Wurzel ist, so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 330, 331) versuchen, ob sie unter die rational-Wurzeln gehören, oder nicht.

Die 115. Aufgabe.

336. Aus einer cubischen Gleichung die Wurzeln zu finden.

Auflösung.

Wenn aus den cubischen Gleichungen das andere Glied weggenommen wird, so bekommt ihr drey Fälle, nemlich

$$x^3 = +px + q$$

$$x^3 = -px + q$$

$$x^3 = +px - q.$$

Damit ihr nun die Wurzel findet, so setzet

$$Rrr \quad rr \quad 4 \quad x =$$

$$x = y + z.$$

$$\text{Dann ist } x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

$$px = py + pz$$

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = py + pz + q \text{ im ersten}$$

$$\text{Setze } 3y^2z + 3z^2y = py + pz \quad (\text{Fälle.})$$

$$\text{so ist } 3yz = p$$

$$z = p : 3y.$$

$$\text{Ferner ist } y^3 + z^3 = q$$

$$\text{das ist } y^3 + p^3 : 27y^3 = q$$

$$y^6 + p^3 : 27 = qy^3$$

$$y^6 - qy^3 = -p^3 : 27$$

$$\frac{1}{4}qq \quad \frac{1}{4}qq \quad (\S. 83).$$

$$y^6 - qy^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

$$y^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3}$$

Nun ist :

$$z^3 = q - y^3$$

$$\text{das ist } z^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}$$

$$z = \left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3}$$

Demnach ist $z + y = \left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3}$ die verlangte Wurzel in dem ersten Falle.

Eben

Eben so findet ihr für x in dem andern Falle $(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3)})^{1/3} + (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3)})^{1/3}$.

Und in dem dritten Falle $(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1/3} + (-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1/3}$.

Die 1. Anmerkung.

337. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet, weil er sie aus *Scipionis Ferrei* Erfindung zuerst in Druck gegeben hat.

Die 2. Anmerkung.

338. Damit aber ihr Gebrauch erbelle, so will ich ein und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3 = * 6x + 40$. Weil $p = 6$, $q = 40$, und daher $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}qq = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; so ist, vermöge der ersten Regel, $x = (20 - \sqrt{(400 - 8)})^{1/3} + (20 + \sqrt{(400 - 8)})^{1/3} = (20 - \sqrt{392})^{1/3} + (20 + \sqrt{392})^{1/3} =$ (wenn die cubic-Wurzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurzel.

Es sey $x^3 = * - 3x + 36$. Weil $p = -3$, $q = 36$, und daher $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}qq = 324$, $\frac{1}{3}p = -1$, $\frac{1}{27}p^3 = -1$; so ist, vermöge der andern Regel, die Wurzel $(18 - \sqrt{(324 + 1)})^{1/3} + (18 + \sqrt{(324 + 1)})^{1/3} =$ (wenn ihr die cubic-Wurzel beyderseits würcklich ausziehet) $1\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Es sey $x^3 = * 6x - 40$. Weil $p = 6$, $q = -40$, und daher $\frac{1}{2}q = -20$, $\frac{1}{4}qq = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; so ist, vermöge der dritten Regel, $(-20 + \sqrt{(400 - 8)})^{1/3} + (-20 - \sqrt{(400 - 8)})^{1/3} = (-20 + \sqrt{392})^{1/3} + (-20 - \sqrt{392})^{1/3}$

Errrr 5 $+ \sqrt{}$

$\pm \sqrt{392}^{\frac{1}{3}} =$ (wenn die cubic-Wurzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $-2 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2-2} = -4$. Demnach ist 4 eine falsche Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

Die 3. Anmerkung.

339. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurzeln aus einer Gleichung von dem vierten Grade auszuziehen gefunden: allein weil sie nicht sonderlich gebraucht wird, so will ich die Ansänger damit nicht aufhalten, sondern gehe vielmehr fort und zeige, wie man durch Näherung die Wurzel finden kan, wenn eine Gleichung keine rational-Wurzel hat.

Die 116. Aufgabe.

340. Aus einer jeden gegebenen Gleichung die Wurzel durch Näherung zu finden.

Auflösung.

Wir wollen die Regeln bald bey Exempeln anbringen, und zwar den Anfang von einer quadratischen Gleichung machen, damit wir sie desto besser begreifen.

Es sey demnach $x^2 - 5x - 31 = 0$. Setzet, vermöge der Grenzen, welche die Gleichung haben kan (§. 333), die Wurzel sey $8 \pm y$, dergestalt, daß y einen Bruch bedeutet, um welchen 8 entweder grösser oder kleiner ist als x . Solchergestalt ist

$$\begin{array}{r} x^2 = 64 \pm 16y \pm y^2 \\ -5x = -40 \pm 5y \\ -31 = -31 \\ \hline -7 \pm 11y \pm y^2 = 0. \end{array}$$

Da

Da nun die Dignitäten eines Bruches beständig abnehmen, und man hier nur die Wurzel beynahе wissen will, so läßt man y weg, und nimt an,

$$-7 \pm 11y = 0$$

$$\text{das ist } 11y = 7$$

$$y = 0.6 = 0.\frac{6}{10}.$$

$$\text{Also ist } x = 8 \pm 0.6 = 8.6.$$

Weil der Werth von x in zehen Theilchen noch nicht genau genug bestimmt ist; so setzet $x = 8.6 \pm y$, und verfaret wie vorhin. Ihr findet demnach

$$x^2 = \frac{7396}{100} \pm \frac{172}{10}y + y^2$$

$$-5x = -\frac{430}{10} - 5y$$

$$-31 = -31$$

$$\frac{7396}{100} - \frac{430}{10} - 31 \pm \frac{172}{10}y - 5y = 0.$$

Das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringet (welches hier, den Anfängern zugefallen, einmal für allemal geschehen soll)

$$73.96 = 4300 - 3100 \pm (1720 - 500)y = 0$$

$$-0.04 \pm 12.20y = 0$$

$$12.20y = 0.04$$

$$y = 0.0032.$$

Also

Also ist $x = 8.6000 \pm 0.0032 = 8.6032$.
 Wenn ihr die Wurzel noch genauer verlangt;
 so setzet $x = 8.6032 \pm y$. Alsdenn ist

$$\begin{array}{r}
 x^2 = 74.01505024 \pm 17.20640000y \pm y^2 \\
 - 5x = -43.01600000 - 5.00000000y \\
 - 31 = -31.00000000 \\
 \hline
 -0.000094976 \pm 12.20640000y = 0 \\
 \hline
 12.20640000y = 0.00094976 \\
 \hline
 y = 0.000077808.
 \end{array}$$

Also ist $x = 8.603277808$.

Man soll ferner die Wurzel aus der cubischen Gleichung $x^3 \pm 2x^2 - 23x - 70 = 0$ ausziehen. Setzet,

$$\begin{array}{r}
 5 \pm y = x \\
 \hline
 \text{so ist } x^3 = 125 \pm 75y \dots \\
 \pm 2x^2 = \pm 50 \pm 20y \dots \\
 - 23x = -115 - 23y \\
 - 70 = -70 \\
 \hline
 -10 \pm 72y = 0 \\
 \hline
 72y = 10 \\
 \hline
 y = 0.1.
 \end{array}$$

Also ist $x = 5 \pm 0.1 = 5.1$.

Geher

Setzt ferner, $x = 5.1 \mp y$; so ist

$$\begin{array}{r}
 x^3 = 132.651 \mp 78.030y \dots \\
 \mp 2x^2 = \mp 52.020 \mp 20.400y \dots \\
 -23x = -117.300 - 23.000y. \\
 -70 = -70.000 \\
 \hline
 -2.629 \mp 75.430y = 0 \\
 \hline
 75.430y = 2.629 \\
 \hline
 y = 0.0348.
 \end{array}$$

Also ist $x = 5.1 \mp 0.0348 = 5.1348$.

Wolte man die Wurzel noch genauer haben; so setze man $x = 5.1348 \mp y$, und suche den Werth von y , wie vorhin.

Wenn ihr die Wurzel geschwinder in vielen Zahlen genau haben wollet; so müßet ihr noch den Werth von y beybehalten, und die quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art (§. 83) auflösen, nur daß ihr zehentheilige Brüche behaltet. Nämlich wenn $x = 5 \mp y$; so ist

$$\begin{array}{r}
 x^3 = 125 + 75y + 15y^2 \\
 + 2x^2 = + 50 + 20y + 2y^2 \\
 - 23x = - 115 - 23y \\
 - 70 = - 70 \\
 \hline
 - 10 + 72y + 17y^2 = 0 \\
 \hline
 17y^2 + 72y = 10 \\
 \hline
 y^2 + 4.2352y = 0.58823530 \\
 4.48422976 \quad 4.48422976 \\
 \hline
 y^2 + 4.2352y + 4.48422976 = 5.07246506 \\
 \hline
 y + 2.1176 = 2.2522 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$y = 0.1346.$$

$$\text{Also ist } x = 5.1346.$$

Woltet ihr nun sehen, $x = 5.1346 + y$, und wie vorhin den Werth von y finden; so würdet ihr gleich durch die andere Rechnung sehr weit hinauf kommen.

Die 1. Anmerkung.

341. In meinen Element. Analyf. (§. 327) habe ich gewiesen, wie auf diese Art gar leicht die Regel des Herrn *Halley* heraus gebracht werde, aus welcher man in Engelland sehr viel macht. Allein, weil die gegebene Regel eben so geschwind den Werth der Wurzel in so kleinen Theilen giebt, und doch viel leichter als die *Halley'sche* zu behalten ist, indem sie die Klarheit ihres Beweises mit sich führet: so kan man am sichersten bey derselben verbleiben.

Die 2. Anmerkung.

342. Nun könnte ich auch zeigen, wie der Werth von x in den gegebenen Gleichungen geometrisch gesucht wird.

wird. Allein, weil die geometrische Ausführung der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Ausführung der undeterminirten herleiten läßt; so will ich zuerst arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beibringen, zumal, da sie in der höhern Geometrie und der differential-Rechnung mehr Nutzen haben, als wol einige vermeinen, auch besondere Kunstgriffe nachzuspüren an die Hand geben.

Von den undeterminirten Aufgaben.

Die 117. Aufgabe.

343. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der beyden ersten der dritten, und ihre Differenz der vierten Zahl gleich sey.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x , die andere y , die dritte z , die vierte t , so ist

$$\begin{array}{rcl} y + x = z & x - y = t & \\ \hline 2y + t = z & x = t + y & \\ \hline 2y = z - t & x = t + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t & \\ \hline y = (z - t) : 2 & x = (z + t) : 2. & \end{array}$$

Da nun nicht mehr Gleichungen zuverdencken sind, so können die Zahlen z und t nach Belieben angenommen werden. Es sey $z = 8$, $t = 2$; so ist $x = (8 + 2) : 2 = 10 : 2 = 5$, und $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$. Es sey $z = 5$, $t = 1$; so ist $x = (5 + 1) : 2 = 6 : 2 = 3$, $y = (5 - 1) : 2 = 4 : 2 = 2$.

An:

Anmerkung.

344. Wenn ihr ganze Zahlen verlangt, so müssen vor z und z solche angenommen werden, deren Summe und Differenz sich durch 2 dividiren läßt.

Die 118. Aufgabe.

345. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $= a$, die eine von den beehrten $= x$, die andere $= y$, so ist

$$\begin{array}{r} xy + x + y = a \\ \hline xy + x = a - y \\ \hline x = (a - y) : (y + 1). \end{array}$$

Es sey $a = 30$, $y = 2$, so ist $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Es sey $a = 20$, $y = 2$, so ist $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Es sey $a = 19$, $y = 4$, so ist $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Die 119. Aufgabe.

346. Zwei Zahlen zu finden, deren Product ein vollkommener Cubus ist, dessen Wurzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der andern gleich ist.

Auflösung.

Es sey die erstere Zahl $= x$, die andere $= y$, die cubic-Wurzel $= v$; so ist

$$v =$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{v = xy^2}{v : y^2 = x} \qquad \frac{xy = v^3}{x = v^3 : y} \\
 \hline
 v : y^2 = v^3 : y \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad y^2 \\
 \hline
 v = v^3 y \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad v \\
 \hline
 1 = v^2 y \\
 \hline
 1 : v^2 = y.
 \end{array}$$

Derowegen ist $v^5 = x$.

Setzet $v = 2$; so ist $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Es sey $v = 3$; so ist $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

Die 120. Aufgabe.

347. Die Summe zweyer vollkommener Quadrate in zwey andere vollkommene Quadrate zutheilen.

Auflösung.

Es sey die Seite des grössern Quadrats $= a$, des kleinern $= b$: die Seite des einen von den gesuchten $a - x$, des andern $yz - b$. So ist

$$\begin{array}{r}
 aa - 2az + zz + y^2 z^2 - 2byz + bb = aa + bb \\
 \hline
 zz + y^2 z^2 = 2byz + 2az \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad z \\
 \hline
 z + yyz = 2by + 2a \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 1 + y^2 \\
 \hline
 z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)
 \end{array}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) §§§§§ Al.

Also ist $a - z = a - (2by + 2a) : (y^2 + 1)$
 $= (ay^2 + a - 2by - 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - 2by - a) : (y^2 + 1)$.
 Hingegen $yz - b = (2by^2 + 2ay) : (y^2 + 1) - b = (2by^2 + 2ay - by^2 - b) : (y^2 + 1) = (by^2 + 2ay - b) : (y^2 + 1)$.

Es sey $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$; so ist $z = (8 + 6) : 5 = 14 : 5$, folglich $a - z = 3 - 14 : 5 = \frac{7}{5}$, und $yz - b = 28 : 5 - 2 = (28 - 10) : 5 = 18 : 5$.
 Deren Quadrate $(1 + 324) : 25 = 13 = 9 + 4$.

Man nimt die beyden Seiten $a - z$ und $yz - b$ an, weil von der Summe der beyden Quadrate sich $aa + bb$ muß abziehen, und das übrige durch z dividiren lassen, wenn der Werth von z rational seyn soll.

Die 121. Aufgabe.

348. Zwey vollkommene Quadrate zu finden, deren Differenz einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinern $= x$, des größern $x + y$, die Differenz $= d$. So ist das kleine Quadrat $= x^2$, das große $x^2 + 2xy + y^2$, folglich

$$\begin{array}{r} y^2 + 2xy = d \\ \hline 2xy = d - y^2 \\ \hline x = (d - y^2) : 2y \end{array}$$

Weil

Weil sich y^2 von d abziehen läßt, so muß y kleiner seyn als \sqrt{d} .

B. E. Es sey $d=10$, $y=3$; so ist $x=(10-9):6=\frac{1}{6}$, $x+y=3+\frac{1}{6}$. Es sey $d=11$, $y=2$; so ist $x=(11-4):4=\frac{7}{4}$, $x+y=2+\frac{7}{4}=\frac{15}{4}$.

Man nimt die Seite des großen Quadrats $x+y$ an, und nicht bloß y , damit der Werth von x rational gefunden wird.

Die 122. Aufgabe.

349. Eine Zahl in zwei andere zuzertheilen, deren Product ein vollkommenes Quadrat ist.

Auflösung.

Es sey die Zahl $=2a$, die Differenz $=2y$; so ist die große $a+y$, die kleine $a-y$ (s. 61), ihr Product $=aa-yy$. Setzt die Seite des Quadrats $xy=n$. So ist

$$\begin{array}{r} aa-yy=aa-2axy+x^2y^2 \\ \hline 2axy=x^2y^2+y^2 \\ \hline y \\ \hline 2ax=x^2y+y \\ \hline x^2+1 \\ \hline 2ax:(x^2+1)=y. \end{array}$$

Es sey $x=2$, $2a=10$; so ist $y=20:5=4$, $a+y=5+4=9$, $a-y=5-4=1$.

Es sey $2a=10$, $x=0$; so ist $y=0$, folglich $a+y=5$, $a-y=5$.

Es s s s a

Es

Es sey $2a=10, x=3$; so ist $y=30:10=3, a+y=1+3=8, a-y=5-3=2$.

Die Seite des Quadrats wird $xy-a$ angenommen, damit man in der Gleichung aa wegbringen, und das übrige durch y dividiren kan, damit der Werth von y rational gefunden wird.

Die 123. Aufgabe.

350. Zwei Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der andern gesetzt wird, die Summe ein Quadrat sey, deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x , die andere y ; so ist

$$\begin{array}{r} x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2 \\ \hline y - y^2 = 2xy \\ \hline (1-y):2 = x. \end{array}$$

Es sey $y=\frac{1}{2}$; so ist $x=\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$. Es sey $y=\frac{1}{3}$; so ist $x=(1-\frac{1}{3}):2=\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

351. Zwei Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der andern gesetzt wird, die Summe die Seite eines Quadrats sey, welche den beyden Zahlen gleich ist.

Auf:

Auflösung.

Es sey die eine Zahl z , die andere y ; so ist

$$z^2 + y = \sqrt{(z + y)}$$

$$z^4 + 2z^2y + yy = z + y$$

$$z^4 + 2z^2y - y + yy = z,$$

das ist, wenn $2z^2 - 1 = v$,

$$vy + yy = z - z^4$$

$$\frac{1}{4}v^2 + vy + yy = \frac{1}{4}v^2 + z - z^4$$

$$\frac{1}{2}v + y = \sqrt{(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4)}$$

$$y = \sqrt{(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4)} - \frac{1}{2}v,$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle setzt,

$$y = \sqrt{(z^4 - z^2 + \frac{1}{4} + z - z^4)} - z^2 + \frac{1}{2},$$

das ist $y = \sqrt{(\frac{1}{4} + z - z^2)} + \frac{1}{2} - z^2$.

Wenn ihr nun rational-Zahlen verlangt; so muß $\frac{1}{4} + z - z^2$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Setzt demnach seine Seite $= zx - \frac{1}{2}$ (§. 349); so ist

$$\begin{array}{r}
 x^2x^2 - xz + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + z - z^2 \\
 \hline
 x^2x^2 - xz = z - z^2 \\
 \hline
 xz^2 - x = 1 - z \\
 \hline
 xz^2 + z = x + 1 \\
 \hline
 z = (x + 1) : (x^2 + 1).
 \end{array}$$

Es sey $x = 2$; so ist $z = (2 + 1) : (4 + 1) = \frac{3}{5}$, folglich $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{25})} = (25 - 18) : 50 + \sqrt{(25 + 24) : 100} = 7 : 50 + \sqrt{49 : 100} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{70 + 350}{500} = \frac{420}{500} = \frac{21}{25}$.

Die 125. Aufgabe.

352. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret, eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2 , das andere y^2 , so ist ihr Product x^2y^2 ; folglich sind $x^2y^2 + x^2$ und $x^2y^2 + y^2$ vollkommene Quadrate. Dividiret das erstere durch x^2 , das andere durch y^2 ; so sind $y^2 + 1$ und $x^2 + 1$ gleichfalls vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des erstern $z - y$, des andern $z - x$, damit sich y^2 und x^2 subtrahiren läßt, folglich der Werth von

von y und x rational gefunden werden mag;
so ist

$$\begin{array}{rcl} y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2, & x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \\ \hline 1 = z^2 - 2zy & 1 = t^2 - 2tx \\ \hline 1 + 2zy = z^2 & 2tx = t^2 - 1 \\ \hline y = (z^2 - 1) : 2z & x = (t^2 - 1) : 2t. \end{array}$$

Es sey $z = 2, t = 3$; so ist $y = (4 - 1) : 4 = \frac{3}{4}$ und $x = (9 - 1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Es sey $z = 3, t = 4$; so ist $y = (9 - 1) : 6 = \frac{4}{3}$, $x = (16 - 1) : 8 = \frac{15}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

353. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzt wird, ein vollkommenes Quadrat herauskommt.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2 , das andere y^2 , so ist $x^2y^2 + x^2 + y^2$ ein vollkommenes Quadrat. Setzt anfangs aus vorhin (§. 352) angeführtem Grunde.

$$\begin{array}{rcl} y^2 - 2ty + tt = yy + 1 \\ \hline \text{so ist } t^2 = 1 + 2ty \\ \hline (t^2 - 1) : 2t = y \\ t - y = t - (t^2 - 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t. \end{array}$$

Es s s s 4

Se

Setzet ferner $v = \sqrt{(yy + 1)} = t - y = (t^2 + 1) : 2t$; so ist $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = x^2 v^2 + y^2$.
Stellet dessen Seite $= z - vx$ (§. 349); so ist

$$\begin{array}{r} x^2 v^2 + y^2 = z^2 - 2vxz + v^2 x^2 \\ \hline y^2 = z^2 - 2vxz \\ \hline 2vxz = z^2 - y^2 \\ \hline x = (z^2 - y^2) : 2vz. \end{array}$$

Hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey z. B. $z = 2, t = 3$; so ist $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, und also
 $x = (4 - 16) : 20 = (36 - 16) : 20 = 20$

$$\begin{array}{r} \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Die 127. Aufgabe.

354. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr Product zu der Summe ihrer Quadrate gesetzt wird, ein vollkommenes Quadrat heraus kommt.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen $2x$, ihre Differenz $2y$, die Seite des Quadrats $t + y$; so ist die grössere Zahl $x + y$, die kleinere $x - y$, und demnach

x^2

$$\begin{array}{r}
 x^2 - y^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2, \text{ d. i.} \\
 3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + yy \\
 \hline
 3x^2 - t^2 = 2ty \\
 \hline
 (3x^2 - t^2) : 2t = y.
 \end{array}$$

Es sey $x=4$, $t=6$; so ist $y=(48-36):12=12:12=1$, folglich $x+y=4+1=5$,
 $x-y=4-1=3$.

Die 128. Aufgabe.

355. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn sie durch zwei bekannte Zahlen multiplicirt wird, beyde Producte ein vollkommenes Quadrat sind.

Auflösung.

Es sey die eine gegebene Zahl $=a$, die andere b , die gesuchte x , das eine Quadrat y^2 , das andere v^2 ; so ist

$$\begin{array}{r}
 \frac{ax=y^2}{x=y^2:a} \qquad \frac{bx=v^2}{x=v^2:b} \\
 \hline
 y^2:a=v^2:b \\
 \hline
 by^2=av^2 \\
 \hline
 y^2=av^2:b \\
 \hline
 y=v\sqrt{(a:b)}.
 \end{array}$$

Es sey 5

Wenn

Wenn demnach eine rational-Zahl gefunden werden soll; so muß $a; b$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Es sey $a=32$, $b=8$; so ist $\sqrt{a:b}=2$.
 Setzet $v=5$; so ist $y=10$, folglich $x=$
 $\frac{25}{8}$.

Die 129. Aufgabe.

356. Eine Zahl zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn sie durch zwei gegebene Zahlen multiplicirt, und zu jedem Producte noch eine andere Zahl addirt wird, beyderseits ein vollkommenes Quadrat herauskommt.

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b , die andern c und d , die gesuchte x , die beyden Quadrate yy und vv ; so ist

$$\begin{array}{rcl}
 ax + c = yy & & bx + d = vv \\
 \hline
 x = (yy - c) : a & & x = (vv - d) : b \\
 (yy - c) : a = (vv - d) : b \\
 \hline
 byy - bc = avv - ad \\
 \hline
 byy = av^2 - ad + bc \\
 \hline
 y^2 = (av^2 - ad + bc) : b \\
 \hline
 y = \sqrt{(av^2 - ad + bc) : b}.
 \end{array}$$

Wenn

Wenn ihr nun eine rational-Zahl verlangt, so setzet $a:b=m^2$; so ist

$$y^2 = m^2v^2 - m^2d + c.$$

Setzet ferner für die Seite dieses Quadrats $t = mv$, oder $mv = t$ (§. 349); so ist

$$\begin{array}{r} m^2v^2 - m^2d + c = m^2v^2 - 2tmv + t^2 \\ \hline 2tmv = t^2 + m^2d - c \\ \hline v = (t^2 + m^2d - c) : 2tm. \end{array}$$

Das ist, wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v = (bt^2 + ad - bc) : 2tbm$.

Es sey $t=4$, $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$; so ist $m^2=1:1=1$, und $m=1$, folglich $v=(16+3-2):8=17:8=2\frac{1}{8}$, und $x=289:64-3=(289-192):64=97:64$.

Von den geometrischen Orten.

Die 38. Erklärung.

357. Die Linie, durch welche eine unbestimmte Aufgabe geometrisch aufgelöst wird, heißt ein geometrischer Ort (Locus geometricus). Insonderheit nennet man es einen Ort an einer geraden Linie, wenn sie eine gerade Linie ist: einen Ort an dem Circul, wenn sie ein Circul: einen Ort an der Parabel, Hyperbel, ELLI-

ELLIPSI u. s. w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die 39. Erklärung.

358. Der Ort an einer geraden Linie wird ein einfacher Ort (*Locus simplex*); der an einem Circul, ein ebener Ort (*Locus planus*); der an einer Parabel, Hyperbel und *Ellipsi*, ein körperlicher Ort (*Locus solidus*) genennet.

Die 130. Aufgabe.

359. Einen Ort an einer geraden Linie zu beschreiben.

Auflösung.

Einen Ort beschreiben heißt die Linie ziehen welche der undeterminirten Aufgabe ein Gnügen thut. Alle Orter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Gleichungen vorstellen:

$$y = \frac{ax}{b} \qquad y = \frac{ax}{b} + c \qquad y = c - \frac{ax}{b}$$

Tab. V.
Fig. 45.

Zieheth also eine gerade Linie AB, und machet AI = b. Zieheth unter einem beliebigen Winkel EI = a. Wenn PM, pm &c. mit EI parallel gezogen werden; so sind AP, Ap &c. = x, PM, pm &c. = y. Denn (*J. 184 Geom.*).

AI;

$$\begin{array}{r} AI : IE = AP : PM \\ b : a = x : y \\ \hline ax : b = y. \end{array}$$

Verlängert EI in G, bis $IG = c$, und ziehet durch G die Linie Dg mit AB, AD mit EG parallel. Wenn PM bis in Q verlängert wird; so ist $DQ = AP = x$, und $QM = ax + c = y$.

$\frac{b}{b}$

Hingegen machet $LG = b$ und $GE = a$, $IG = c$; so ist $QM = ax : b$ (S. 184 Geom.) und $PM = ax = c$.

$\frac{b}{b}$

Endlich sey $AC = c$, und $AD = b$. Ziehet Tab. V. durch D die Linie FE mit AC parallel, und Fig. 46. machet $DE = a$. Ziehet ferner die Linie AL, und mit ihr CB, hingegen NM mit AC parallel; so ist $PN = ax : b$ (S. 184 Geom.), folglich $PM = MN - NP = c - ax : b$.

Die 131. Aufgabe.

360. Einen jeden Ort an einer Parabel zu beschreiben.

Auflösung.

Es können zween Fälle vorkommen. Denn es beziehen sich die Linien x und y entweder auf die Höhlung, oder das erhabene der Parabel.

Im

Tab. V. Im erstern Falle sey $KD = PN = n$, AK
 Fig. 47. $= p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, der Pa-
 rameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$; so ist
 (§. 184 Geom.).

$$\begin{array}{l} DH : HL = DQ : QN \\ q : r = x : \frac{rx}{q} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} DH : DL = DQ : DN \\ q : s = x : \frac{sx}{q} \end{array}$$

Demnach $AP = KP (= DN) - KA = \frac{sx}{q}$

$- p$, und $PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n$,

folglich, weil $t \cdot AP = PM^2$ (§. 217).

$$y^2 - \frac{2rx}{q}y + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nr}{q}x + n^2 = \frac{tsx}{q} - tp.$$

das ist:

$$\begin{array}{l} y^2 - \frac{2rx}{q}y + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nr}{q}x + n^2 = 0 \\ \quad \quad \quad - \frac{tsx}{q} + tp \end{array}$$

Tab. V. Im andern Fall sey $DK = PN = n$, AK
 Fig. 48. $= p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = IM$
 $= y$, $QM = DI = x$; so ist (§. 184 Geom.).

DH

$$\begin{array}{l} DH : HL = DQ : QN \\ q : r = y : \frac{ry}{q} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} DH : DL = DQ : DN \\ q : s = y : \frac{sy}{q} \end{array}$$

Demnach $AP = KP (= DN) - AK = \frac{sy - p}{q}$, u.

$$PM = QM - QN - NP = x - \frac{ry}{q} - n, \text{ folglich,}$$

$$\begin{array}{l} \text{weil } t \cdot AP = PM^2 \text{ (§. 217),} \\ x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = \frac{tsy - tp}{q} \end{array}$$

das ist:

$$\begin{array}{l} x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = 0 \\ \quad \quad \quad - \frac{tsy + tp}{q} \end{array}$$

Wenn ihr nun die Glieder einer gegebenen Gleichung mit denen Gliedern einer von den gefundenen vergleicht, so könnet ihr in jedem Falle finden, wie groß die Linien DK AK, DH und LH in dem vorkommenden Falle anzunehmen sind, oder welche von ihnen gar weg bleiben, und solchergestalt den verlangten Ort beschreiben.

3. E.

3. E. Es sey $y^2 - ax = 0$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$\begin{array}{rcl} -\frac{2r}{q} = 0, & -\frac{2n}{n} = 0, & -\frac{tf}{q} = -a, \quad \frac{n^2 + tp}{p} = 0 \\ \hline r = 0, q = s & & t = a \end{array}$$

Tab. V. Weil demnach $LH = 0$, und $DK = 0$; so fällt die Linie DH auf KP, und, weil $AK = 0$, der Punct K in A, folglich DQ in AP, und QM in PM, und ist weiter nichts nöthig, als daß mit dem Parameter a eine Parabel beschrieben wird. Denn so ist $AP = x$ und $PM = y$.

Wiederum, es sey $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$\begin{array}{rcl} -\frac{2r}{q} = 0, & -\frac{2n}{n} = -a, & -\frac{tf}{q} = -b \\ \hline r = 0, q = s & & t = b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} n^2 + tp = \frac{1}{4}aa \\ \hline \frac{1}{4}aa + bp = \frac{1}{4}aa \\ \hline bp = 0 \\ \hline p = 0. \end{array}$$

Tab. V. Weil demnach $LH = 0$, so fällt DH auf DL. Weil $KA = 0$; so fällt K in A. Solcher gestalt wird mit dem Parameter b eine Parabel AMR beschrieben, auf der Ase AB in A ein

einen Perpendicular $AL = \frac{1}{2}a$ aufgerichtet, und LQ mit AB QM aber mit LA parallel gezogen; so ist $LQ = x$, $QM = y$. Denn, weil $PM = y - \frac{1}{2}a$; so ist

$$y^2 - ay + \frac{1}{4}aa = bx \text{ (§. 217).}$$

$$\text{folglich } y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0.$$

Es sey $y^2 - ay - bx - cc = 0$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$\begin{array}{rcl} -2r=0 & -2n=-a & -tf=-b \\ \hline q & n=\frac{1}{2}a & q \\ \hline r=0, q=f & & t=b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} n^2 + tp = -cc & & \\ \hline \frac{1}{4}aa + bp = -cc & & \\ \hline bp = -cc - \frac{1}{4}aa & & \\ \hline p = -cc - \frac{1}{4}aa & & \\ \hline & & b. \end{array}$$

Beschreibet mit dem Parameter b eine Pa- Tab. VI.
rabel AMR, und richtet in A auf die Axe AN Fig. 50.
eine perpendicular Linie AH auf. Macher
 $AE = \frac{1}{2}a$, $AF = c$; so ist $EF = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + cc)}$.
Macher $EF = AI = AG$, und $AH = b$; ziehet
die Linie HI, und mit ihr GK parallel; so ist
 $AK = (cc + \frac{1}{4}aa) : b$. Wenn nun endlich EQ
mit der Axe AN und DK, ingleichen QM mit
(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Ett tt EA

EA parallel gezogen werden; so ist $DQ = x$,
und $QM = y$. Denn $AP = EQ = AK \mp$
 $KP = cc \mp \frac{1}{4}aa \mp x$, und $PM = y - \frac{1}{2}a$, folg-

lich, weil $PM^2 = t \cdot AP$ (§. 217).

$$y^2 - ay \mp \frac{1}{4}aa = cc \mp \frac{1}{4}aa \mp bx$$

Das ist, $y^2 - ay - bx - cc = 0$.

Die 132. Aufgabe.

361. Einen Ort an einer Ellipfi zube-
schreiben.

Auflösung.

Tab. VI. Es sey in C der Mittelpunkt der Axc,
Fig. 51. $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$,
 $DL = s$, $AC = CB = m$, der Parameter $= t$,
 $DQ = x$, $QM = y$; so ist (J. 185 Geom.).

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

$$\text{Daher } CP = DN - KC = \frac{sx}{q} - p, \text{ und}$$

$$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n.$$

Da nun in der Ellipfi (§. 239).

$$t : 2$$

$$\begin{aligned}
 t:2m &= PM^2:AP \cdot PB \\
 \text{u. } PM^2 &= y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + n^2 \\
 AP &= m + \frac{fx}{q} - p, \text{ und } PB = m - \frac{fx}{q} + p \\
 \text{also } AP \cdot PB &= m^2 - p^2 + \frac{2pfx}{q} - \frac{s^2x^2}{q^2}; \\
 \text{so ist } y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + n^2 &= \\
 &\quad \frac{tm^2 - tp^2}{2m} \\
 &\quad + \frac{2tpfx - ts^2x^2}{2mq}, \text{ folglich} \\
 y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + n^2 &= 0 \\
 &\quad + \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} \\
 &\quad - \frac{tm^2}{2m}.
 \end{aligned}$$

Wenn ihr die vorgegebenen Gleichungen, wie vorhin in der Parabel, mit dieser allgemeinen vergleicht; so werdet ihr in jedem Falle den Ort an der Ellipsi beschreiben können.

$$\text{Z. E. Es sey } y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0;$$

so ist

$$\text{Ztt tt 2} \quad -2r$$

$$\begin{array}{rcl}
-\frac{2r}{q} = 0 & \frac{tf^2}{2mq^2} = \frac{c}{b} & -\frac{2n}{n=0} = 0 - \frac{2tpf}{2mq} = \frac{cd}{b} \\
r=0, q=f & \frac{t}{2m} = \frac{c}{b} & -\frac{2p}{p=-\frac{1}{2}d} = \frac{cd}{b} \\
\frac{tp^2 - tm^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b} & & \\
\frac{cp^2 - cm^2}{b} = -\frac{a^2c}{b} & & \\
\frac{p^2 - m^2}{b} = -\frac{a^2}{b} & & \\
\frac{\frac{1}{4}dd + aa}{b} = m^2 & & \\
\sqrt{\left(\frac{1}{4}dd + aa\right)} = m. & &
\end{array}$$

Tab. VI.
Fig. 52.

Richtet demnach auf der Linie AB in C die Linie CE = a perpendicular auf, und machet KC = $\frac{1}{2}d$; so ist, KE = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}dd + aa\right)}$. Machet ferner CA = CB = KE; so ist AB die Ase der Ellipsis. Machet ferner CH = b und CI = c ; ziehet die Linie HI, und mit ihr AG parallel; so ist GC der halbe Parameter. Machet endlich CO = CG, und beschreibet über AO einen halben Circul; so ist CL die halbe kleine Ase, und ihr könnet die Ellipfin ALB (§. 257) beschreiben, in welcher KP = x , und PM = y . Denn CP = $x + \frac{1}{2}d$, AP = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}dd + aa\right)} + x + \frac{1}{2}d$, PB = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}dd + aa\right)} - x - \frac{1}{2}d$, und daher AP.PB = $aa - xx - dx$. Da nun $c:b = PM^2$: AP.PB = y^2 ; $aa - xx - dx$ (§. 239); so ist

$$y^2 =$$

$$y^2 = \frac{a^2c}{b} - \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b}$$

folglich
$$y^2 \mp \frac{cx^2}{b} \mp \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$$

Zusatz.

362. Wenn man $t=2m$ setzt, so kommt die Gleichung für alle Werthe in dem Circul.

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} \mp \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny \mp \frac{2nrx}{q} \mp n^2 = 0$$

$$\mp \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} \mp p^2 = m^2.$$

Die 133. Aufgabe.

363. Einen Ort an einer Hyperbel zu beschreiben.

Auflösung.

Es sey die zwerch-Axe $AB = 2m$, in C der Tab. VI. Mittel-Punct, $CK = p$, $KD = PN = n$, Fig. 53. $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, der Parameter $= t$; so ist (J. 185 Geom.).

$$DH:HL = DQ:QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Et t t 3

DH

$$DH:DL=DQ:DN$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Also ist $CP=DN(=KP)-CK=\frac{fx}{q}-p$, und

$$PM=QM-QN-PN=y-\frac{q}{rx}-n.$$

Nun ist $t:2m=PM^2:AP.PB$ (§. 260), und

$$PM^2=y^2-\frac{2rxy}{q}+\frac{r^2x^2}{q^2}-\frac{2ny}{q}+\frac{2nrx}{q}+n^2,$$

$$AP.PB=(\frac{q}{q^2}CP-\frac{q^2}{q}CA)(\frac{q}{q^2}CP+\frac{q^2}{q}CA)=\frac{q}{q^2}CP^2-\frac{q}{q^2}CA^2$$

$$=\frac{f^2x^2}{q^2}-\frac{2pfx}{q}+p^2-m^2.$$

Derwegen:

$$y^2-\frac{2rxy}{q}+\frac{r^2x^2}{q^2}-\frac{2ny}{q}+\frac{2nrx}{q}+n^2$$

$$=\frac{tf^2x^2}{2mq^2}-\frac{2tpfx}{2mq}+\frac{tp^2}{2m}-\frac{tm^2}{2m}, \text{ folglich:}$$

$$y^2-\frac{2rxy}{q}+\frac{r^2x^2}{q^2}-\frac{2ny}{q}+\frac{2nrx}{q}+n^2=0$$

$$-\frac{tf^2x^2}{2mq^2}+\frac{2tpfx}{2mq}+\frac{tp^2}{2m}$$

$$-\frac{tm^2}{2m}.$$

Wels

Welche Gleichung eben so, wie die vorigen, gebraucht wird (§. 360, 361).

Die 134. Aufgabe.

364. Einen Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu beschreiben.

Auflösung.

Es seyn SA und AR die Asymptoten einer Tab. VI. Hyperbel. Ziehet DL mit der einen AR pa- Fig. 54. rallel, und nach Belieben die Linie DH; hin- gegen KD, QM, LH, IR mit der andern AS parallel. Es sey ferner $KD = PN = n$, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, $RI = m$, $AR = DL = f$; so ist (§. 184 Geom.).

$$\begin{aligned} DH:HL &= DQ:QN \\ q:r &= x:\frac{rx}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DH:DL &= DQ:DN \\ q:f &= x:\frac{fx}{q} \end{aligned}$$

Derwegen ist $AP = DN - AK = \frac{fx}{q} = p$,

und $PM = QM - PN - NQ = y - n - \frac{rx}{q}$,

folglich, weil $AR \cdot RI = AP \cdot PM$ (§. 282)

$$f \cdot m = p \cdot \frac{fx}{q}$$

$$\begin{array}{r}
 mf = \frac{fyx}{q} - \frac{frx^2}{q^2} - py - \frac{fnx}{q} + \frac{prx}{q} + pn \\
 \hline
 quf = \frac{fyx}{q} - \frac{frx^2}{q^2} - qpy - \frac{fnx}{q} + \frac{prx}{q} + pnq \\
 \hline
 qm = \frac{yx}{q} - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{f} - \frac{nx}{f} + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f} \\
 \hline
 \frac{yx}{q} - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{f} + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f} = 0 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -ny - qm.
 \end{array}$$

Tab. VI.
Fig. 55.

Wenn alles, wie vorhin, bleibt, nur daß TM mit DH parallel gezogen, und QM = DT = x, hingegen TM = QD = y angenommen wird; so findet man, wie vorhin

$$\begin{array}{r}
 xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{f} + \frac{pry}{f} + \frac{pnq}{f} = 0 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -ny - mq.
 \end{array}$$

Welche beide Gleichungen eben wie die vorigen gebraucht werden.

Anmerkung.

365. Wenn man die gefundenen allgemeinen Gleichungen für die geometrischen Orter gegen einander hält; so wird man folgende Regeln wahrnehmen, durch welche man urtheilen kan, ob eine gegebene Gleichung ein Ort an einer Parabel, oder Ellipsi, oder Hyperbel, oder einem Circul sey. Nämlich, wenn xy in einer Gleichung vorhanden ist, und 1) nur ein Quadrat entweder von x, oder von y durch andere Grössen multiplicirt, vorkommt; so ist der Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. 2) Wenn

daß

das Quadrat von x oder y durch das Quadrat der halben Grösse multiplicirt ist, durch welche man xy multiplicirt befindet; so ist der Ort an einer Parabel.

3) Wenn x^2 und y^2 beyde das mehr Zeichen $+$ haben; so ist der Ort an einer Ellipti, oder einem Circul: und zwar siehet man, daß er an einem Circul sey, wenn man $x:2m = 1$ findet.

4) Endlich, wenn x^2 und y^2 verschiedene Zeichen haben; so ist der Ort an einer Hyperbel, welche um ihre Ape beschriben worden ist: welche beyde letztern Regeln 5) auch gelten, obgleich xy fehlet.

Hingegen ist 6) in diesem letztern Falle in dem Orte an der Parabel auch x^2 nicht vorhanden.

Die 135. Aufgabe.

366. Eine cubische und biquadratische Gleichung geometrisch auszuführen.

Auflösung.

1. Wenn in der Gleichung nur eine unbekannte Grösse vorhanden ist, als y , so nimt man noch eine x dazu, und bringet die vorgegebene Gleichung auf geometrische Orter.
2. Wenn man zween von diesen Ortern gebührend beschreibt, daß nemlich die Linien x und y beyderseits auf einander fallen; so giebt der Durchschnitt beyder Orter den verlangten Werth von y .

B. E. Die vorgegebene Gleichung sey $y^3 + aby = a^2c$; so ist $a:y = y^2 + ab:ac$

Et t t 5

Se

Gezet: $a:y=y:x$

so ist I. $ax=y^2$

Daher $x=y^2:a$

ingleichen $y:x=y^2 \mp ab:ac$
 $=ax \mp ab:ac$
 $=x \mp b:c$

II. $x^2 \mp bx=cy$.

$ax=y^2$ $ax=y^2$
 $x^2 \mp bx=cy$ $x^2 \mp bx=cy$

III. $ax-x^2-bx=y^2-cy$. IV. $ax \mp x^2 \mp bx=y^2$
 $\mp cy$

Ferner $x^2 \mp bx=cy$ $y^2 \mp aby=a^2c$
 Das ist $x^2 \mp by^2=cy$ $axy \mp aby=a^2c$

a
 V. $y^2 \mp ax^2=acy$ VI. $xy \mp by=ac$
 b b

Solchergeſtalt findet man

I. $y^2-ax=0$ an der Parabel.

II. $x^2 \mp bx-cy=0$ an der äußern Parabel.

III. $y^2 \mp x^2-cy \mp bx=0$ an dem Circul.

IV. $y^2-x^2 \mp cy-ax=0$ an der Hyperbel.
 $-bx$

V. $y^2 \mp \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b}=0$ an der Ellipſi.

VI. $xy \mp by-ac=0$ an der Hyperbel zwiſchen ihren Aſymptoten.

Weil

Weil sich der Circul am leichtesten beschreiben läßt; so kan man ihn mit einem von den übrigen fünf Vertern beschreiben, und dadurch den Werth von y finden.

Beschreibet demnach mit dem Parameter Tab. VII. a eine Parabel (§. 220); so ist in ihr eine Fig. 56. jede Abscisse $DP = x$, eine jede Semiordinate aber $PM = y$ (§. 217).

Für den Circul ist (§. 362).

$$\frac{2r = 0}{q} \quad \frac{-2n = -c}{n = \frac{1}{2}c} \quad \frac{-2p = b - a}{p = \frac{a - b}{2}}$$

$$r = 0, q = s \quad n^2 + p^2 = m^2$$

das ist $\frac{1}{4}c^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 = m^2$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2)} = m.$$

Derwegen traget auf eine gerade Linie Fig. 57. AB auß C in $K\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. und richtet in K die Linie $KD = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; so ist CD der Radius des Circuls DAMB. Wenn ihr selbigen beschrieben habt; so ziehet DP mit AB parallel, und ihr habt $DP = x$, $PM = y$.

Nun siehet man leicht, wie der Circul mit Fig. 56, 57. der Parabel zu vereinigen sey, damit die Linien DP und PM aufeinander fallen. Richtet nemlich in D die Linie $DK = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; ziehet KQ mit DP parallel, und machet $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Endlich beschreibet mit CD durch

durch den Scheitel-Punct D den Circul; so ist $PM = y$.

Denn $DP = KQ = y^2$ (§. 222), und daher

$$CQ = KQ - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}b. \text{ Ferner ist}$$

$$QM = PM - DK = y - \frac{1}{2}c, \text{ folglich:}$$

$$QC^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 \mp \frac{1}{4}a^2 \mp \frac{by^2}{a} - \frac{ab}{2} \mp \frac{1}{4}bb$$

$$QM^2 = y^2 - cy \mp \frac{1}{4}cc$$

$$CM = \frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy \mp \frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{4}a^2 - \frac{ab}{2} \mp \frac{1}{4}b^2$$

$$CM^2 = DC^2 = \frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab \mp \frac{1}{4}b^2 \text{ subtr.}$$

$$\frac{y^4}{a^2} \mp \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$\frac{y^3 \mp aby - a^2c}{y : a^2} = 0.$$

Auf eben solche Art kan man die Verten an der Ellipsi und der Hyperbel beschreiben, und den Circul darauf tragen, damit man den Werth von y findet: welches in folgenden Aufgaben durch wahre Exempel soll erläutert werden.

Es sey die vorgegebene Gleichung $y^4 \mp 2by^3 \mp a^2cy = a^3d$. Weil $y^4 \mp 2by^3 = a^3d - a^2cy$; so ist

a^3

$$a^2 : y^2 = y^2 \mp 2by : ad - cy.$$

$$\text{Setzet: } a : y = b \mp y : x$$

$$\text{so ist I. } \frac{ax = by \mp y^2}{ax - by = y^2}$$

$$\text{daher } \frac{a^2 : ax - by = ax \mp by : ad - cy}{a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2.}$$

$$\text{II. } a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Setzet ferner für y^2 seinen Werth $ax - by$;
so ist

$$\frac{a^3d - a^2cy = a^2x^2 - ab^2x \mp b^3y}{a^2}$$

$$\text{folglich III. } \frac{ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}}{y^2 \mp by = ax}$$

$$\text{IV. } \frac{y^2 \mp by \mp ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 \mp ax - \frac{b^2x}{a}}{a^2}$$

$$\text{V. } \frac{y^2 \mp by - ad \mp cy \mp \frac{b^3y}{a^2} = ax - x^2 \mp \frac{b^2x}{a}}{a^2}$$

Solchergestalt findet man

$$\text{I. } y^2 \mp by - ax = 0 \text{ an der Parabel.}$$

$$\text{II. } \frac{y^2}{b^2} - \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} \mp \frac{a^3d}{b^2} = 0 \text{ an der Hyperbel.}$$

$$\text{III. } \frac{x^2}{a} - \frac{b^2x}{a} \mp cy - ad = 0 \text{ an der äussern Parabel.}$$

$$\mp \frac{b^3y}{a^2}$$

IV.

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3 y}{a^2} + \frac{b^2 x}{a} + ad = 0$ an der gleich-
seitigen Hyperbel.

$$+ by - ax \\ - cy$$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = 0$ an dem Circul.

$$+ by - ax \\ + cy$$

Wenn man nun alle diese Orter (§. 360, 362 363) beschreibt, und die an den Regel-Schnitten mit dem an dem Circul, wie vorhin, verknüpft; so hat man der gegebenen Gleichung auf fünferley Art ein Genügen gethan.

Anmerkung.

367. Ich halte es für rathsamer, daß ich die vornehmsten Fälle, welche vorkommen können, durch wahre Exempel erläutere.

Die 136. Aufgabe.

368. Zwischen zwey gegebenen Linien zwey stets mittlere proportional-Linien zu finden.

Auflösung.

Tab. VII.
Fig. 58.

Es sey die kleinere $= a$, von den gesuchten
die grössere $= b$, die kleinere $= y$,
die grössere $= x$;

so ist

$$\frac{a:y=y:x}{\text{I. } ax=y^2} \qquad \frac{y:x=x:b}{\text{II. } by=x^2}$$

$a:y$

$$\begin{array}{l}
 a:y=x:b \\
 \hline
 \text{III. } ab=xy \\
 \quad ax=y^2 \\
 \quad x^2=by \\
 \hline
 \text{V. } x^2+ax=y^2+by \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 y^2=ax \\
 \hline
 \text{IV. } by-y^2=x^2-ax \\
 \quad x^2=by \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}by \\
 \quad \quad \quad ax=y^2 \\
 \hline
 \text{VI. } \frac{1}{2}x^2+ax=\frac{1}{2}by+y^2 \\
 \text{VII. } ax-\frac{1}{2}x^2=y^2-\frac{1}{2}by.
 \end{array}$$

Solchergeſtalt bekommt man folgende
Orter:

- I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.
- II. $x^2 - by = 0$ an der äußern Parabel.
- III. $xy - ab = 0$ an der Hyperbel zwischen
den Aſymptoten.
- IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ an dem Circul.
- V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ an der gleichſeitigen
Hyperbel.
- VI. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by - ax = 0$ an der ungleich-
seitigen Hyperbel.
- VII. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - ax = 0$ an der Ellipſi.

I. Wenn man demnach mit dem Parame- Tab. VII.
ter a eine Parabel DCM beſchreibt; ſo iſt der Ort beſchrieben, und $DQ=x$, $QM=y$. Fig. 59.

Für den Circul iſt (§. 362)

$$\begin{array}{l}
 -2r=0 \quad -2n=-b \quad -2p=-an^2+p^2=m^2 \\
 \hline
 q \qquad n=\frac{1}{2}b \qquad p=\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2)} \\
 \hline
 r=0, q=f \qquad \qquad \qquad =m \\
 \qquad \qquad \qquad \text{Gra.}
 \end{array}$$

Tab. VII.
Fig. 60. Traget also auf eine gerade Linie BG aus C in $K\frac{1}{2}a$, richtet in K den Perpendicul KD $=\frac{1}{2}b$ auf; so ist $CD = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$ der Radius des Circuls DBMG, und darinnen DQ $=x$, QM $=y$.

Tab. VII.
Fig. 59. Weil nun der Punct D in den Scheitel-Punct der Parabel fällt; so richtet auf der Axe DQ die Linie DK $=\frac{1}{2}b$ perpendicular auf, ziehet aus K die Linie KG mit DQ parallel, machet KC $=\frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D den Circul DBMG; so ist DQ $=x$, und QM $=y$ in dem gegebenen Falle.

Wenn man in der Gleichung $xy = ab$ vor x seinen Werth $y^2:a$ aus der Gleichung $ax = y^2$ sezet: so bekommt man $y^3 = a^2b$, oder $y^3 - a^2b = 0$. Und diese Gleichung dienet zu erweisen, daß die Linie y recht gefunden worden sey. Denn, weil DK $=\frac{1}{2}b$, und KC $=\frac{1}{2}a$; so ist $DC^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$ (§. 172 Geom.). Wiederum, weil QM $=y$, und der Parameter von der Parabel $=a$; so ist DQ $=$ KP $= y^2:a$ (§. 222); und daher CP $= y^2:a - \frac{1}{2}a$, hingegen PM $= y - \frac{1}{2}b$, folglich;

$$\begin{array}{r} CP^2 = y^4 - y^2 + \frac{1}{4}aa \\ \hline a^2 \\ PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}bb \\ \hline CM^2 = y^4 - by + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb, \\ \hline a^2 \end{array}$$

CM²

$$\begin{array}{l} \text{CM}^2 = \text{CD}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 \\ \hline y^4 - by = 0 \\ \hline a^2 \\ \hline y^3 - a^2b = 0. \end{array} \quad y : a^2$$

II. Für die Ellipse ist (§. 361)

$$\begin{array}{l} -2r = 0 \quad t = \frac{1}{2} \quad -2n = \frac{1}{2}b \\ \hline q \quad 2m \quad n = \frac{1}{4}b \\ r = 0 \quad q = f \quad t : 2m = 1 : 2 \\ \hline -2tp = -a \quad n^2 - tm^2 + tp^2 = 0 \\ \hline 2m \quad 2m \quad 2m \\ \hline p = a \quad \frac{\frac{1}{16}b^2 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0}{\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}m^2} \\ \hline \frac{\frac{1}{8}b^2 + a^2 = m^2}{\sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)} = m = t.} \end{array}$$

Demnach ist die halbe kleine Axe $= \sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$ (248).

Machet $BC = n$, und richtet $AB = \frac{1}{4}b$ dar: Tab. VII. auf perpendicular auf; so ist $AC = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + a^2)}$ Fig. 61. Richtet ferner auf AC die Linie $AD = \frac{1}{4}b$ perpendicular auf; so ist $DC = \sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)}$, das ist, die halbe große Axe.

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Uuu uu Gleich

Tab. VII. Gleichergestalt richtet auf $EF = \frac{1}{4}b$, $EG =$
 Fig. 62. $\frac{1}{2}a$ perpendicular auf; so ist $GF = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Richtet ferner $GH = \frac{1}{2}a$ auf GF per-
 pendicular auf; so ist $FH = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$,
 das ist, die halbe kleine Aye.

Tab. VII. Traget nun auf die Linie AB aus A in E
 Fig. 63. und aus E in B die halbe große Aye: ziehet
 durch E die Linie HI auf AB perpendicular,
 und machet EH und EI der halben kleinen
 Aye gleich; so könnet ihr (§. 257) die Ellipsin
 AHBI beschreiben. Machet ferner $EL = a$,
 und ziehet $LD = KL = \frac{1}{4}b$ auf AB perpendicu-
 lar, hingegen KG und DF mit AB parallel.
 Endlich traget auf KG aus K in C $\frac{1}{2}a$, und
 beschreibet aus C durch D einen Circul; so
 ist abermal $DQ = x$ und $QM = y$. Denn
 weil $PM = y - \frac{1}{4}b$; so ist $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Wiederum, weil $EP = x - a$, $AE = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + a^2)} = m$, folglich $AP = m + x - a$, und
 $PB = m - x + a$; so ist $AP \cdot PB = m^2 + 2ax - x^2 - a^2 = \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2$. Derowegen, da
 $AP \cdot PB : PM^2 = 2m : r = 2 : 1$ (§. 239); so ist

$$\frac{2y^2 - by + \frac{1}{8}b^2 = \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2}{y^2 - \frac{1}{2}by = ax - \frac{1}{2}x^2}.$$

In dem Circul wird gefunden $y^2 - by = ax - x^2$. Wenn ihr diese beyden Gleichun-
 gen von einander abziehet; so bleibt übrig
 $-\frac{1}{2}by = -\frac{1}{2}x^2$. Demnach ist $by = x^2$, folg-
 lich $y : x = x : b$. Wenn ihr ferner für x in
 der

der Gleichung für den Circul by sehet; so bekommt ihr $y^2 = ax$, folglich $a:y = y:x$. Und solchergeſtalt ſind die Linien DQ und QM richtig gefunden worden.

III. Für die gleichſeitige Hyperbel iſt (§. 363)

$$\begin{array}{rclcl} 2r=0 & -t=-1 & -2n=b & 2p=-a \\ \hline q & 2m & n=-\frac{1}{2}b & p=-\frac{1}{2}a \\ \hline r=0 \quad q=f, \quad t=2m \\ n^2 + m^2 - p^2 = 0 \\ \hline m^2 = p^2 - n^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 \\ \hline m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}. \end{array}$$

Weil $\frac{1}{4}b^2$ von $\frac{1}{4}a^2$ abgezogen werden muß; Tab. VII. ſo müſſet ihr hier für b die kleinere und für a Fig. 60. die gröſſere Linie annehmen, und ſolches auch bey dem Circul beobachten, daß nemlich die Linien CK und KD mit einander verwechſelt werden. Wenn ihr dieſes in acht nehmet; ſo könnet ihr die verlangten Linien ver- Tab. VII. Fig. 64. mittelſt der Hyperbel folgendergeſtalt finden. Ueber $AB = \frac{1}{2}b$ beſchreibet einen halben Circul. Darein traget $BC = \frac{1}{2}a$; ſo iſt $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$, oder, wenn a die gröſſere, b die kleinere heißen ſolte, $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, das iſt, die halbe Axe.

Tab. VII. Traget nun auf eine gerade Linie aus G
Fig. 65, 60. in A und B die halbe Ape, richtet in A die
Linie AI = AG perpendicular auf, und be-
schreibet aus dem mittel-Puncte G durch I
einen halben Circul FIF; so sind in F und f
die brenn-Puncte (§. 265), und ihr könnet
die Hyperbel (§. 271) beschreiben. Wenn
dieses geschehen ist, so machet $EG = \frac{1}{2}b$,
richtet in E die perpendicular-Linie EK auf,
und machet $ED = DK = \frac{1}{2}a$. Ziehet durch
D und K die Linien DQ und KP mit der Ape
AL parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$, und
beschreibet aus C durch D einen Circul.
Endlich ziehet aus M die halbe Ordinate LM;
so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Denn $LM = y + \frac{1}{2}a$, $EA = GE - AG =$
 $\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$, oder $EA = \frac{1}{2}b - m$,
und daher $AL = EA + EL = x + \frac{1}{2}b - m$,
 $BL = x + \frac{1}{2}b + m$. Also ist $LM^2 = y^2 + ay +$
 $\frac{1}{4}a^2$, und $AL.LB = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - m^2 = x^2 +$
 $bx + \frac{1}{4}a^2$. Also ist

$$y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}a^2 \quad (\S. 290).$$

$$y^2 + ay = x^2 + bx$$

Im Circul $y^2 - ay = bx - x^2$ Subtr.

demnach $\frac{2ay = 2x^2}{ay = x^2}$

$$ay = x^2$$

folglich $y:x = x:a.$

Ge.

Setzet ferner in der Gleichung für den Circul ay für x^2 ; so bekommt ihr

$$y^2 - ay = bx - ay$$

das ist $y^2 = bx$

folglich $b:y = y:x$.

IV. Auf eben diese Art kan man durch die ungleichseitige Hyperbel der Aufgabe ein Genügen thun. Wollet ihr aber

V. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gebrauchen; so richtet HD auf DI perpendicular auf, machet $DE = a$, und $EL = b$; theilet EL in zween gleiche Theile in N, oder machet $DK = \frac{1}{2}b$, und ziehet KN mit DE parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D den Circul DELM. Endlich beschreibet auch durch L die Hyperbel TMLS, und aus M, wo sie den Circul durchschneidet, ziehet QM mit DH, oder auch PM mit DQ parallel; so ist $DQ = PM = x$, $DP = QM = y$. Denn vermöge der Hyperbel ist (§. 282).

$$DE:DP = PM:EL$$

$$a:y = x:b$$

daher $y - a:a = b - x:x$

und $y - a:b - x = a:x$ (§. 142).

Vermöge des Circuls ist $y^2 - ay = bx - x^2$, und daher

$$uu \quad uu \quad 3 \quad y - a$$

$$y - a : b - x = x : y$$

daher $a : x = x : y$.

Es ist aber auch $a : x = y : b$.

Derowegen $x : y = y : b$.

Zusatz.

369. Wenn die Seite eines Würfels a ist, die Seite des doppelten Würfels $= y$; so ist $2a^3 = y^3$, oder, wenn $2a = b$, $a^2b = y^3$. Also muß man zwischen der Seite des Würfels und der doppelten Seite zwei mittlere proportional-Linien suchen; so ist die erstere davon die Seite des doppelten Würfels.

Die 137. Aufgabe.

Tab. VIII. 370. Eine gerade Linie AB, welche
Fig. 67. nach Belieben in C getheilet worden ist,
noch ferner in D dergestalt zutheilen,
daß $CD : DB = AC^2 : CD^2$.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$; so ist
 $DB = b - y$, folglich, weil $CD : DB = AC^2 : CD^2$,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Setzet $a : y = y : x$

so ist I. $y^2 = ax$

und $y : b - y = a : ax$
 $= a : x$ (§. 142)

$$\text{II. } xy = ab - ay$$

Ser.

Ferner $y^2:by-y^2=a:x$ (§. 142)

$$ax:by-y^2=a:x$$

$$x:by-y^2=1:x$$

$$\text{III. } \frac{x^2=by-y^2}{ax=y^2}$$

$$\text{IV. } \frac{x^2+ax=by}{ax=y^2}$$

$$\text{V. } \frac{x^2+2ax=y^2+by}{ax=y^2}$$

$$\text{und } \frac{x^2=by-y^2}{ax=y^2}$$

$$\text{VI. } ax-x^2=2y^2-by.$$

Also bekommt man Gleichungen an folgenden Orten, nemlich

I. $y^2-ax=0$ an der Parabel.

II. $xy+ay-ab=0$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

III. $y^2+x^2-by=0$ an dem Circul.

IV. $x^2+ax-by=0$ an der äußern Parabel.

V. $y^2-x^2+by-2ax=0$ an der gleichseitigen Hyperbel.

VI. $y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}by-\frac{1}{2}ax=0$ an der Ellipsi.

Tab. VIII. Beschreibt demnach mit dem Parameter
Fig. 68. a eine Parabel; so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Für den Circul ist (§. 362)

$$\begin{array}{rcl} \frac{2r=0}{q} & - \frac{2n=-b}{n=\frac{1}{2}b} & - \frac{2p=0}{p=0} \\ \hline r=0 \quad q=f & & \frac{n^2 - m^2 + p^2 = 0}{n^2 = m^2} \\ & & \frac{\frac{1}{4}b^2 = m^2}{\frac{1}{2}b = m.} \end{array}$$

Tab. VIII. Wenn ihr demnach mit $AC = \frac{1}{2}b$ einen
Fig. 69. Circul beschreibet, und CD auf AB perpendicular aufrichtet, DL aber mit AB parallel ziehet; so ist ein jedes $DQ = x$, und ein jedes $QM = y$. Denn $PM = y - \frac{1}{2}b$, $AP = \frac{1}{2}b + x$, $PB = \frac{1}{2}b - x$. Daher $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$, und $AP \cdot PB = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, folglich

$$\begin{array}{r} y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 - x^2 \\ \hline y^2 - by = -x^2 \\ \hline y^2 + x^2 - by = 0. \end{array}$$

Tab. VIII. Damit ihr nun x und y in unserem Falle
Fig. 68. findet; so setzet den Circul und die Parabel zusammen, dergestalt, daß der Punct D in die

die Scheitel der Parabel, und DL auf ihre Aze fällt. Nämlich richtet in D auf der Aze DR einen Perpendicular $DC = \frac{1}{2}b$ auf, und beschreibet aus C durch D den Circul; so ist $DQ = x$ und $QM = y$ in unserm Falle.

Denn $DQ = CS = y^2 : a$, und $SM = y - \frac{1}{2}b$, $CM = \frac{1}{2}b$. Deromwegen, weil $CM^2 = CS^2 + SM^2$, und $CM^2 = \frac{1}{4}b^2$, $CS^2 = y^4 : a^2$, $SM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$; so ist

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{y^4}{a^2} + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4 + y^2 - by = 0}{a^2}$$

$$\frac{y^4 + a^2y^2 - a^2by = 0}{a^2}$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

daher $b - y : y = y^2 : a^2$.

Weil die Gleichung der gegenwärtigen Aufgabe gar wenig unterschieden ist von derjenigen, welche wir oben durch alle Regel-Schnitte construirt haben (S. 368); so wollen wir die übrigen Regel-Schnitte übergehen.

Die 138. Aufgabe.

371. Einen rechtwinklichten Triangel Tab. VIII. zubeschreiben, von welchem das eine Stück CB von der größten Seite gegeben wird,

wird, welches der Perpendicul CD abschneidet, welcher aus dem rechten Winkel D gefällt wird, und zwar von der Beschaffenheit, daß die Summe der Quadrate von dem andern Stücke AC und dem Perpendicul CD nebst einem Rectangulo aus dem Perpendicul CD in eine gegebene Linie FG gleich sey dem Rectangulo aus dem Stücke BC in das andere Stück AC und eine gegebene Linie HI.

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $FG = b$, $HI = c$, $AC = x$, $CD = y$; so ist

$$CB : DC = DC : AC$$

$$a : y = y : x$$

$$\text{I. } ax = y^2$$

$$AC^2 + CD^2 + CD.FG = BC.(AC + HI)$$

$$x^2 + y^2 + by = ax + ac$$

$$\text{II. } y^2 + by = ax + ac - x^2$$

daher $ax + by = ax + ac - x^2$

$$\text{III. } by = ac - x^2$$

$$\frac{1}{2}by = \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}x^2$$

$$y^2 + by = ax + ac - x^2$$

$$\text{IV. } y^2 + \frac{1}{2}by = ax + \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}x^2$$

$$y^2 = ax$$

by

$$\frac{by = ac - x^2}{V. y^2 - by = ax - ac + x^2.}$$

Wir haben demnach Gleichungen für folgende Orter:

- I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.
- II. $y^2 + x^2 + by - ax - ac = 0$ an dem Circul.
- III. $x^2 + by - ac = 0$ an der äußern Parabel.
- IV. $y^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}by - ax - \frac{3}{2}ac = 0$ an der Ellipsi.
- V. $y^2 - x^2 - by - ax + ac = 0$ an der Hyperbel.

Wenn man in dem Orte an der äußern Parabel $x^2 + by - ac = 0$ für x^2 seinen Werth $y^4 : a^2$ setzt; so bekommt man

$$\frac{y^4 + by - ac = 0}{a^2}$$

$$\text{daher } y^4 + a^2by - a^3c = 0.$$

Woraus zu ersehen ist, daß man eine bi-quadratische Gleichung zu construiren hat.

I. Wenn man mit dem Parameter a eine Parabel beschreibt; so ist der Ort an der Parabel vorhanden.

II. Für den Ort an dem Circul ist

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{2r=0}{q} & - \frac{2n=b}{n=-\frac{1}{2}b} & - \frac{2p=-a}{p=\frac{1}{2}a} \\
 \hline
 r=0, q=f & & \\
 & n^2 + p^2 - m^2 = -ac & \\
 & \hline
 & n^2 + p^2 + ac = m^2 & \\
 & \hline
 & \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac = m^2 & \\
 & \hline
 & \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac\right)} = m. &
 \end{array}$$

Tab. VIII. Machet demnach $RI = \frac{1}{2}b$, und richtet in
 Fig. 71. I perpendicular auf $HI = \frac{1}{2}a$; so ist $HR = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb\right)}$. Verlängert RH in L bis $RL = a$, und in O, bis $RO = c$. Beschreibet über OL einen halben Circul; so ist der Perpendicular $CR = \sqrt{ac}$ (S. 210 Geom.), folglich $CH = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + ac\right)}$ der Radius des Circuls. Wenn ihr also aus C mit CH den Circul beschreiben und durch C die Linie AB mit OL parallel gezogen habt; so machet $CK = \frac{1}{2}a$. Richtet in K den Perpendicular $KD = \frac{1}{2}b$ auf, und ziehet die Linie DQ mit AB parallel; so ist der Ort an dem Circul beschrieben, und der Punct D der Ursprung von x , hingegen y wird bis an die Linie DQ gezogen.

Wenn ihr nun ferner damit den Ort in der Parabel verknüpfen, und dadurch x und y in dem gegebenen Falle determiniren wollet; so nehmet DQ für die Aye an, und beschreibet um

um selbige mit dem Parameter a die Parabel. Wo sie den Circul durchschneidet, nemlich aus dem Puncte M, lasset einen Perpendicular QM auf die Linie DQ fallen; so ist $DQ = x$, $QM = y$. Macher ihr nun $QS = a$, und ziehet die Linien DM und SM; so ist DMS der verlangte Triangel.

Denn $DQ = KP = \frac{y^2}{a}$, und daher $CP = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a$.

Ferner $PM = PQ + QM = \frac{1}{2}b + y$. Deswegen

$$\begin{aligned} CP^2 &= \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 \\ PM^2 &= y^2 + by + \frac{1}{4}bb \\ \hline CM^2 &= \frac{y^4}{a^2} + by + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 \\ CH^2 &= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + ac \\ \hline \frac{y^4}{a^2} + by - ac &= 0 \\ \hline y^2 + a^2by - a^3c &= 0, \end{aligned}$$

welches die biquadratische Gleichung ist, welche man hat construiren sollen.

Wie diese Gleichung durch die übrigen Regel-Schnitte construirt wird, ist aus der 136. Aufgabe (§. 368) abzunehmen.

Die

Die 139. Aufgabe.

372. Eine allgemeine Regel zu finden, alle cubischen und biquadratischen Gleichungen zu construiren.

Auflösung.

Tab. VIII. Es sey MAN eine Parabel, und ihre Aze
Fig. 72. aO, mit welcher AP parallel, darauf DH
perpendicular gezogen ist. Aus H als dem
Mittel-Puncte beschreibet durch A den Cir-
cul AMN. Nun sey $AD = b$, $DH = d$,
 $AQ = c$; so ist $AH^2 = dd + bb$. Es sey fer-
ner $PM = x$, der Parameter der Parabel
 $= a$; so ist $OM = x + c$ und $KM = x + d$.
Da nun (§. 233)

$$a : OM + AQ = PM : AP (= QO)$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

$$\text{folglich } DP = HK = \frac{x^2 + 2cx}{a} - b;$$

$$\text{so ist } HK^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} \\ - \frac{4bcx}{a} + bb.$$

$$\text{Und weil } KM^2 = x^2 + 2dx + dd; \text{ so ist} \\ \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb + x^2 \\ + 2dx + dd = bb + dd, \text{ das ist}$$

x^4

$$\begin{array}{r}
 \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0 \\
 \quad \quad \quad - \frac{2bx^2}{a} + \frac{2dx}{a} \\
 \quad \quad \quad + x^2 \\
 \hline
 x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0. \quad \frac{x}{a^2} \\
 \quad \quad \quad - 2abx + 2a^2d \\
 \quad \quad \quad + a^2x
 \end{array}$$

Hieraus ist klar, daß, wenn das andere Glied das mehr Zeichen + hat, die wahren Wurzeln zur Rechten fallen. Vergleichet demnach mit dieser Gleichung folgende $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; so findet ihr

$$\begin{array}{rcl}
 c = \frac{1}{4}p, & 4c^2 - 2ab + a^2 = q & 4c^2 - 2ab + a^2 = -q \\
 \hline
 4c^2 + a^2 - q = 2ab & & 4c^2 + a^2 + q = 2ab \\
 \hline
 \frac{1}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab & & \frac{1}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab \\
 \hline
 p^2 + \frac{1}{2}a - q = b & & p^2 + \frac{1}{2}a + q = b \\
 \hline
 \frac{8a}{2a^2d - 4abc} = r & & \frac{8a}{2a^2d - 4abc} = -r \\
 \hline
 2a^2d = 4abc + r & & 2a^2d = 4abc - r \\
 \hline
 d = \frac{2bc + r}{a} & & d = \frac{2bc - r}{a}
 \end{array}$$

das

das ist

das ist

$$d = \frac{\frac{1}{4}p}{16a^2} + \frac{p^3}{4a^2} + \frac{pq}{2a^2} + r \quad d = \frac{\frac{1}{4}p}{16a^2} + \frac{p^3}{4a^2} + \frac{pq}{2a^2} - r$$

Setzet nun $PN = x$, und das übrige bleibe wie vorhin; so ist $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$, $NR^2 = x^2 - 2dx + d^2$, und weil (§. 233)

$$a : ON + AQ = PM : AP$$

$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2xc}{a}$$

auch daher $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx - b}{a}$, demnach

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2;$$

folglich, da $HN^2 = HR^2 + NR^2$ (§. 172 Geom.),

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2 - 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} - 2bx^2 - 2dx = 0$$

$$+ \frac{x^2}{a}$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3 -$$

$$\begin{aligned} x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc &= 0 \\ - 2abx - 2a^2d \\ + a^2x. \end{aligned}$$

Hieraus erhellet, daß, wenn das andere Glied das minder-Zeichen — hat, die wahren Wurzeln zur Linken fallen. Man vergleiche demnach mit der gefundenen Gleichung folgende, $x^3 - px^2 + qx + r = 0$; so ist

$$\begin{aligned} -p &= -4c, 4c^2 - 2ab + a^2 = q, 4c^2 - 2ab + a^2 = -q \\ \frac{1}{4}p &= c \quad \frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab \quad \frac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab \\ \frac{p^2 + \frac{1}{2}a - q}{8a} &= b \quad \frac{p^2 + \frac{1}{2}a + q}{8a} = b \\ \frac{4abc - 2a^2d = r}{4abc - r = 2a^2d} & \quad \frac{4abc - 2a^2d = -r}{4abc + r = 2a^2d} \\ \frac{2bc - r = d}{a \quad 2a^2} & \quad \frac{2bc + r = d}{a \quad 2a^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d, \quad \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$$

Also ist in allen vollständigen cubischen Gleichungen

$$\begin{aligned} AQ &= \frac{1}{4}p \\ DA &= \frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} \end{aligned}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) xxx DH

$$DH = \frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{p^3}{16a^2} \pm \frac{pq}{4a^2} \pm \frac{r}{2a^2}}$$

Nemlich q hat allezeit in der Regel $-$, wenn es in der Gleichung \pm hat, und hingegen \pm , wenn hier $-$ ist. Hingegen ist beständig $\pm r$, ausser, wenn in der Gleichung p und r verschiedene Zeichen haben.

Wenn einige Glieder in der Gleichung fehlen; so müssen auch aus der Gleichung alle weggelassen werden, in welchen die dazu gehörigen Buchstaben zu finden sind. Z. E. Wenn das andere Glied fehlet; so ist

$$\frac{1}{4}p = 0, \text{ und daher } DA = \frac{1}{2}a \pm q, \text{ und } DH = \frac{r}{2a^2}$$

Wenn ihr das Quadrat von dem Radio des Circuls HM oder HN sehet $bb \pm dd \pm af$; so läßt sich die Gleichung auf keine cubische bringen, sondern sie bleibt biquadratisch.

Wenn ihr nun damit die Gleichung $x^4 \pm px^3 \pm qx^2 \pm rx \pm f = 0$ vergleicht; so bleibt alles, wie vorhin: nur wird gefunden

$$f = a^3 f, \text{ und daher } f : a^3 = f.$$

Solchergehalt werden die biquadratischen Gleichungen durch eben diese Regel construiert; nur daß der Radius des Circuls ($= \sqrt{bb \pm dd \pm af}$) anders gefunden wird, wie bereits in einem Exempel in der vorhergehenden Aufgabe (§. 371) gezeigt worden ist.

An:

Anmerkung.

373. Diese Regel nennet man insgemein die *Bascherische central-Regel*, weil sie *Thomas Bascher*, ein Engelländer, gefunden hat. Ich halte es vor dienlich, ihren Gebrauch durch folgende Aufgäbe zu erläutern.

Die 140. Aufgabe.

374. In einem rechtwinklichten *Triangel ABC* wird gegeben das Stück von der Hypothenuſe *BD* und das von der Grundlinie *EC* nebst dem Perpendicul *AB*: man ſoll die Seiten *BC* und *AC* finden. Tab. VIII. Fig. 73.

Auſlösung.

$$\begin{aligned} \text{Es ſey } AB &= a & DC &= x \\ BD &= b & AE &= y \\ EC &= c \text{ ſo iſt } BC &= b + x \\ & & AC &= c + y. \end{aligned}$$

$$CD : DB = CE : EA$$

$$x : b = c : y$$

$$xy = bc$$

$$y = bc : x$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\begin{aligned} b^2 + 2bx + x^2 &= a^2 + c^2 + 2cy + y^2 \\ &= a^2 + c^2 + 2bc + \frac{b^2c^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$b^2x^2 + 2bx^3 + x^4 = a^2x^2 + c^2x^2 + 2bc^2x + b^2c^2$$

$$\text{Das iſt, } x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0.$$

$$- a^2x^2$$

$$- c^2x^2$$

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$

$$\text{Neh}$$

Nehmet a für den Parameter an, und beschreibet eine Parabel. Weil

$p=2b$, $q=b^2-a^2-c^2$, $r=-2bc^2$, $f=-b^2c^2$; so ist in der Backerischen central-Regel

$$\text{Tab. VIII, Fig. 72. } AQ = \frac{1}{2}b, \quad DA = \frac{1}{2}a + \frac{4b^2}{8a} - \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a + \frac{c^2}{2a}$$

$$= a + \frac{c^2}{2a}$$

$$DH = \frac{1}{2}b + \frac{8b^3}{16a^2} - \frac{2b^3}{4a^2} + \frac{2a^2b}{4a^2} + \frac{2bc^2}{4a^2} - \frac{2bc^2}{2a^2}$$

$$= b - \frac{bc^2}{2a^2}.$$

Tab. VIII. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel, machet $aQ = \frac{1}{2}b$, und in der Linie QP , welche mit der Axe parallel gezogen ist, $AD = a + \frac{c^2}{2a}$ die perpendicular-Linie

$$DH = b - \frac{bc^2}{2a^2}. \quad \text{Wie die Linien } c^2 : 2a \text{ und}$$

$bc^2 : 2a^2$ gefunden werden, ist aus den oben gefundenen Werthen von dergleichen Linien klar: nemlich $c^2 : 2a$ ist die halbe dritte proportional-Linie zu a und c , hingegen $bc^2 : 2a^2$ ist die vierte zu a , b und $c^2 : 2a$. Durch H und A ziehet die Linie CB , und machet $AB = a$,
AC

AC = $b^2c^2 : a^3$, welches die vierte proportional-Linie zu a , b und $b^2c^2 : a^2$ ist. Ueber CB beschreibt einen halben Circul, und richtet aus A den Perpendicular AE auf. Endlich beschreibt aus H mit HE einen Circul, welcher die Parabel in M durchschneidet; so ist PM = x ,

$$\text{Denn } AD^2 = a^2 + c^2 + c^4$$

$$DH^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$AH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + c^4 - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$EH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + c^4 + \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

Ferner ist (§. 233)

$$a : OM + aQ = PM : PA$$

$$a : x + b = x : x^2 + bx$$

$$\text{daher } DP = HR = \frac{x^2 + bx}{a} - a - \frac{c^2}{2a}$$

$$\text{und weil } RM = x + b - \frac{bc^2}{2a^2}, \text{ so ist}$$

$$RM^2 = x^2 + 2bx + bb - \frac{bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

xxx 3

HR²

$$\begin{aligned}
 HR^2 = & \frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x^2 - 2bx + \frac{a^3 - c^2x}{a} \\
 & - \frac{bc^2x}{a^2} + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}
 \end{aligned}$$

Wenn man nun von der Summe dieser beiden Quadrate das Quadrat von EH abziehet; so bleibt

$$\begin{aligned}
 \frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} = 0 \\
 - x^2 \\
 - c^2x^2 \\
 \frac{c^4}{a^2}
 \end{aligned}$$

übrig, und demnach ist

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0 \\
 - a^2x^2 \\
 - c^2x^2,
 \end{aligned}$$

Ende des ersten Theils.



Der

Der andere Theil,
 von den
 Anfangs-Gründen
 der
Differential-
Rechnung.

Die 1. Erklärung.

1. **D**ie differential-Rechnung ist eine Wissenschaft, aus einer gegebenen endlichen Grösse eine unendlich kleine zu finden, deren unendliche zusammen genommen, ihr gleich werden.

Anmerkung.

2. Der Herr Geheime Rath von Leibniz hat diese Rechnung gefunden. Es ist aber der tieffsin-
 nige Geometra, *Isaac Newton*, in Engelland auf
 eben dergleichen Gedanken gekommen, wiewol er
 eine andere Manier hat, die unendlich kleinen Grös-
 sen zu bezeichnen, und auch die Rechnung selbst mit
 einem andern Namen nennet, nemlich *Methodum*
Fluxionum.

Die 2. Erklärung.

3. Eine unendlich kleine Grösse ist die-
 jenige, welche so ein geringer Theil von
 der andern ist, daß er mit ihr nicht ver-
 glichen werden kan.

Der 1. Zusatz.

4. Dannenhero ist sie, in Ansehung derjenigen Grösse, mit welcher sie nicht verglichen werden kan, für nichts zuhalten.

Der 2. Zusatz.

5. Folglich, wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer andern addirt, oder von ihr subtrahirt wird; so ist in dem erstern Falle die Summe, in dem andern die Differenz der gegebenen gleich zuachten, das ist, eine unendlich kleine Grösse kan eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerkung.

6. Mercket aber wohl, daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer andern für nichts zuachten; an sich aber wol etwas ist. Denn bildet euch ein, ihr wollet die Höhe eines Berges messen, und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret, jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg um den Diameter eines Sandkörnleins niedriger geworden. Allein, da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaffen ist, daß die Höhe einerley gefunden wird, ob das Sandkörnlein liegen bleibt, oder von dem Winde weggelagt wird: so kan man dasselbe, in Ansehung eines grossen Berges, für nichts, und also seine Grösse, in Ansehung der Höhe des Berges, für unendlich klein halten. Dieses hat man schon längst überall in acht genommen, wo man die Geometrie bey körperlichen Dingen in der Natur anbringt. Also setzen wir in der Astronomie, der Diameter der Erde sey, in Ansehung der Weite von der Sonne, und noch mehr der Fixsterne, für einen Punct, oder unendlich klein zuhalten, weil die erste Bewegung der

Sterne

Sterne sich eben so verhalten würde, wenn die Erde würcklich ein untheilbarer Punct wäre. So halten wir in den Mond-Finsternissen die Erde für eine vollkommene Kugel, und also die Höhen der Berge, in Ansehung des Diameters der Erde, für unendlich klein, oder für nichts; weil der Schatten der Erde sich auf dem Monde nicht anders darstellen würde, wenn die Berge gleich nicht da wären, und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da man nun auch in der Geometrie großen Vortheil davon hat, wenn man die Grössen in unendlich kleine Theile in Gedanken theilet, das ist, in so kleine, welche, in Ansehung ihrer, für nichts zu halten sind, indem man daraus die endlichen Grössen öfters determiniren, und ihre verborgene Eigenschaften auf die allerleichteste Manier finden kan: wer will es den Geometris verdenken, daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerkung.

7. Ihr wißt aus der gemeinen Geometrie, daß eine Linie beschrieben wird, wenn ein Punct sich durch einen gewissen Raum bewegt; eine Fläche, wenn eine Linie; ein Körper, wenn eine Fläche sich bewegt. Also erwachsen die Grössen, indem unendlich viele kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Newton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklärung.

8. Wenn die unendlich kleinen Grössen als der Unterscheid zweier endlichen angesehen werden, so nennet man sie Differential-Grössen.

Die 4. Erklärung.

9. Differentiiren heißt, die differential-Größe von einer gegebenen endlichen finden.

Die 5. Erklärung.

10. Die Grössen, welche immer wachsen, oder abnehmen, indem andere unverändert bleiben, heissen veränderliche; die andern aber unveränderliche Grössen. Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Grössen, der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn indem jene beyden beständig wachsen, bleibt dieser unverändert (§. 217 P. I.).

Zusatz.

11. Da nun die differential-Grössen die unendlich kleinen Theile sind, welche nach und nach anwachsen, indem sie erzeugt werden (§. 7, 8); so haben die unveränderlichen Grössen keine differential-Grösse.

Der 1. willkührliche Satz.

12. Nennet die veränderlichen Grössen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z ; die unveränderlichen aber mit den ersten, a, b, c .

Der 2. willkührliche Satz.

13. Die differential-Grösse von x nennet dx , die von y nennet dy , und so weiter.

Der 1. Zusatz.

14. Also ist da , oder db , oder $dc = 0$ (§. 11).

Der

Der 2. Zusatz.

15. Und die differential-Größe von $x + y - a$ ist $dx + dy$; die von $x - y + a$ aber $dx - dy$. Demnach ist es leicht, die Größen, welche zu einander addiret, oder von einander subtrahiret sind, zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

16. Zwei Größen, welche einander multipliciren, als xy , zu differentiiren.

Auflösung.

1. Multipliciret die differential-Größe der einen veränderlichen Größe in die andere veränderliche Größe.
2. Die beyden Producte addiret zusammen, so kommt die differential-Größe von xy heraus, $x dy + y dx$.

Beweis.

Lasset x und y um ihre halbe differential-Größe vermehret und vermindert werden, so kommt in dem erstern Falle $x - \frac{1}{2}dx$ und $y - \frac{1}{2}dy$, in dem andern Falle $y + \frac{1}{2}dy$ und $x + \frac{1}{2}dx$. Multipliciret beyde durch einander in beyden Fällen, so bekommet ihr $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$ und $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Wenn ihr beyde Producte von einander abziehet, so bleibt für die differential-Größe des Rectanguli xy übrig $x dy + y dx$. W. S. E. W.

Der

Der 1. Zusatz.

17. Wenn viele Gröſſen einander multipliciren, ſo dürfet ihr nur zwei oder mehrere nach einander als eine anſehen, und ihr könnt ſie nach der gegebenen Regel differentiiren. Z. E. Es ſey xyv zu differentiiren, ſo iſt die differential-Gröſſe $xydv + xvdy + yvdx$. Denn es ſey $xy = t$, ſo iſt $xyv = tv$, folglich $d(xyv) = t dv + v dt$. Nun iſt $dt = xdy + ydx$. Derowegen, wenn ihr für t und dt die gehörigen Werthe ſetzt, ſo findet ihr $t dv + v dt = xydv + vx dy + vy dx$.

Der 2. Zusatz.

18. Dannhero findet ihr ferner die differential-Gröſſe einer Potenz, wenn ihr ihren Exponenten um 1 vermindert, und alſo denn die erniedrigte Potenz in ihren unveränderlichen Exponenten und die differential-Gröſſe der Wurzel multipliciret. Nämlich $d(x^2) = 2x dx$, $d(x^3) = 3x^2 dx$, und überhaupt $d(x^m) = mx^{m-1} dx$.

Der 3. Zusatz.

19. Die differential-Gröſſe von ay iſt $ady + yda$. Nun iſt $da = 0$ (§. 14). Derowegen iſt $d(ay) = ady$.

Der 4. Zusatz.

20. Weil $\sqrt{x} = x^{1/2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$ (§. 42 Part. 1.), ſo iſt die differential-

tial = Grösse von einer irrational = Grösse
 $(n:m)x^{n:m-1}dx = (n:m)x^{(n-m):m}dx = (n:m)$
 $\sqrt[m]{x^{m-n}}dx.$

Der 5. Zusatz.

21. Wiederum, weil $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, und überhaupt $1:x^m = x^{-m}$; so ist die differential-Grösse von $1:x$, und $1:x^2$, in gleichen $1:x^m = -x^{-2}dx$, $-2x^{-3}dx$, und $-mx^{-m-1}dx$.

Anmerkung.

22. Daß $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, $1:x^3 = x^{-3}$ u. s. w. könnet ihr bald begreifen, wenn ihr nur bedenket, es gehen die Exponenten in einer arithmetischen Verhältniß fort, indem die Dignitäten in einer geometrischen fortschreiten. Nun seyn die Dignitäten $x^2, x, 1, 1:x, 1:x^2, 1:x^3$, so sind die Exponenten 2. 1. 0. - 1. - 2. - 3. Und daher ist eben $x^0 = 1$.

Der 6. Zusatz.

23. Endlich, weil $1:\sqrt{x} = 1:x^{1/2} = x^{-1/2}$, $1:\sqrt{x^3} = 1:x^{3/2} = x^{-3/2}$, und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n} = 1:x^{n:m} = x^{-n:m}$; so sind die differential-Größen von dergleichen Größen — $\frac{1}{2}x^{-3/2}dx$, $-\frac{3}{2}x^{-5/2}dx$, und überhaupt — $(n:m)x^{-n:m-2}dx = -(n:m)x^{(-n-m):m}dx = -ndx$
 $\frac{m}{m}\sqrt[m]{x^{n+m}},$

Die

Die 2. Aufgabe.

24. Zwei Gröſſen, welche einander dividiren, $x:y$ zudifferentiiren.

Auflösung.

Es ſey $x:y=v$

ſo iſt $x=vy$

$$dx = vdy + ydv \quad (\S. 16).$$

$$dx - vdy = ydv$$

daſ iſt, $dx:y - xdy:y^2 = dv$

oder $(ydx - xdy):y^2 = dv.$

Regel.

(1) Multipliciret die differential-Gröſſe des Zehlers in den Nenner, und (2) des Nenners in den Zehler. (3) Ziehet das letztere Product von dem erſtern ab. (4) Das übrige dividiret durch das Quadrat des Nenners.

Zuſatz.

25. Wenn in dem Zehler und Nenner viele veränderliche Gröſſen enthalten ſind, ſo könnet ihr ſie gleichfalls nach den gegebenen Regeln differentiiren, wenn ihr ſie als eine anſehet. Denn es ſey $xy:vz$ zudifferentiiren. Setzet $xy=t$ und $vz=f$; ſo iſt $d(xy:vz) = (f dt - t df):f^2$. Nun iſt

$$dt =$$

$dt = xdy + ydx$, und $df = vdz + zdv$ (§. 16).
 Derwegen ist $fdt - tdf = vxxydy + vzydx$
 $- vxydz - xyzdv$, folglich $d(xy : vz) =$
 $(vxxydy + vzydy - xyzdv - xyvdz) : v^2z^2$.

Die 1. Anmerkung.

26. Wie wir die Regel in der Division gefunden haben, so hättet ihr auch alle Regeln finden können, welche in dem 4, 5 und 6 Zusage der vorhergehenden Aufgabe auf eine andere Art hergeleitet worden sind: Denn setzt

$$\begin{array}{l} \sqrt[m]{x^n} = v, \\ \text{so ist } x^n = v^m \\ \hline nx^{n-1}dx = mv^{m-1}dv \quad (\S. 18). \\ \hline nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = dv. \end{array}$$

Nun ist $v^{m-1} = v^m : v = x^n : \sqrt[m]{x^n}$, folglich
 $nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = nx^{n-1}dx \sqrt[m]{x^n} : mx^n =$
 $(n:m) x^{-1}dx \sqrt[m]{x^n} = (n:m) x^{-1}x^{n:m}dx =$
 $(n:m)x^{n:m-1}dx$, wie ihr es (§. 20) gefunden habt.

Die 2. Anmerkung.

27. Damit ihr den Nutzen der differential-Rechnung in der höhern Geometrie sehet, so muß ich zeigen, wie die Eigenschaften der krummen Linien dadurch erfunden werden.

Die

Von den Tangentibus der krummen Linien, oder den geraden Linien, welche sie berühren.

Die 6. Erklärung.

Tab. IX.
Fig. 75.

28. Weil der Punct, welcher die krumme Linie beschreibt, in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (I. 2, 8 Geom.); so kan man sich die krummen Linien vorstellen, als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt, und daher ein Polygon von unendlich unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet, daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade TM verlängert wird; so ist selbige der Tangens der krummen Linie.

Zusatz.

29. Derowegen zeigt der Tangens die Direction, welche der Punct, der die krumme Linie beschrieben, an jedem Theile derselben gehabt hat.

Die 7. Erklärung.

Tab. IX.
Fig. 76.

30. Der SUBTANGENS ist die Linie PT, welche zwischen dem Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist.

Die 8. Erklärung.

Tab. IX.
Fig. 75.

31. Wenn ihr in dem Puncte der Berührung M eine perpendicular = Linie MH aufrichtet, bis sie die Axe in H erreicht, so heißt sie die normal = Linie;
der

der Theil der Axc ober PH, welcher zwischen ihr und der Semiordinate PM liegt, die subnormal-Linie.

Die 3. Aufgabe.

32. In einer jeden gegebenen algebraischen Linie den zu einem gegebenen Punkte gehörigen Subtangenten zu finden. Tab. IX.
Fig. 75.

Auflösung.

Setzet die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe, und ziehet MR mit der Axc AH parallel, so ist $MR = Pp$ (§. 22 *Geom.*) die Differential der Abscisse AP , mR die Differential der Semiordinate PM (§. 8). Weil nun PM mit pm parallel ist, so ist der Winkel MmR dem Winkel TMP gleich (§. 97 *Geom.*): folglich, da bey R und P rechte Winkel sind, $mR : MR = PM : PT$, (§. 183 *Geom.*). Setzet nun $PM = y$, $PA = x$; so ist $MR = dx$, $mR = dy$ (§. 13), folglich $dy : dx = y : PT$, und demnach $PT = y dx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Aequation substituiret, welche die Natur einer krummen Linie insbesondere erkläret; so verschwindet dx und dy , und kommt der Subtangens TP in lauter endlichen Grössen heraus.

Der 1. Zusatz.

33. Es sey $ax = y^2$, so ist $adx = 2ydy$, $dx = 2ydy : a$, folglich $PT = y dx : dy = 2y^2 dy : a dy$
(*Wolf's Mathef. Tom. IV.*) $\frac{2y^2 dy}{a dy} = 2y^2$

$=2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist in der Parabel der Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

34. Es sey für unendliche Parabeln $a^{m-1}x = y^m$, so ist

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \quad (\S. 18).$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m ;$$

$$a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx.$$

Wenn also $m=3$; so ist $PT=3x$, das ist, in der Parabel von dem andern Geschlechte ist $PT:AP=3:1$ &c.

Der 3. Zusatz.

35. Es sey $a^n x^r = y^m$, so ist

$$ra^n x^{r-1} dx = my^{m-1} dy \quad (\S. 18).$$

$$dx = my^{m-1} dy : ra^n x^{r-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1} dy =$$

$$my^m : ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r.$$

Setzet z. E. $a^3 x^2 = y^5$; so ist $PT = \frac{5}{2}x$, das ist, $PT:AP=5:2$.

Der 4. Zusatz.

36. In dem Circul ist $ax - xx = yy$, und demnach

$$adx$$

$$\frac{adx - 2xdx = 2ydy}{dx = 2ydy : (a - 2x)}$$

$$PT = ydx : dy = 2y^2dy : (a - 2x)dy = 2y^2 : (a - 2x) = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x). \text{ Solcher}$$

gestalt ist $\frac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$.

Weil $PT = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$; so ist $AT = \text{Tab. IX.}$
 $(ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : \text{Fig. 75.}$
 $(\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$, folglich $a - 2x : a =$
 $x : AT$.

Der 5. Zusatz.

37. Es sey für unendliche Circul (S. 259. A. I.).

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

$$\text{so ist } \frac{max^m - 1dx - (m+1)x^m dx}{y^m dy} = (m+1)$$

$$\frac{dx = (m+1)y^m dy : (max^m - 1 - (m+1)x^m)}{}$$

$$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^m - 1 - (m+1)x^m)$$

$$= (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^m - 1 - (m+1)x^m)$$

$$= (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x).$$

Demnach ist $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x).$

Es sey ein Circul von dem andern Geschlechte, so ist $m=2$, also $AT = ax : (2a - 3x)$
 und $PT = (3ax - 3x) : (2a - 3x).$

¶¶¶¶ 2

Der

Der 6. Zusatz.

38. In der Ellipse ist $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 239 P. I.) und daher

$$\frac{2aydy = abdx - 2bxdx}{dx = 2aydy : (ab - 2bx)}$$

$$\begin{aligned} PT = ydx : dy &= 2ay^2dy : (ab - 2bx)dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) \\ &= (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x). \end{aligned}$$

Daher ist $AT = (2ax - 2x^2) : (a - 2x) - x = (2ax - 2x^2 - ax + 2x^2) : (a - 2x) = ax : (a - 2x)$ wie im Circul (§. 36).

Der 7. Zusatz.

39. Für unendliche Ellipses ist (§. 258 P. I.)

$$ay^{m+n} = bx^m(a-x)^n \text{ und daher}$$

$$\frac{(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^ndx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx}{(m+n)ay^{m+n-1}dy : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) = dx}$$

$$PT = ydx : dy = (m+n)ay^{m+n} : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1})$$

$$\begin{aligned} &= (mbx^m(a-x)^n + nbx^m(a-x)^{n-1}) : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) \\ &= (mbx^{m-1}(a-x)^n + nbx^m(a-x)^{n-1}) : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) \\ &= (\text{wenn ihr mit } bx^{m-1} \text{ und } (a-x)^{n-1} \text{ dividiret}) (m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Derowegen ist } AT &= (m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx) - x \\ &= (max - mx^2 + nax - nx^2 - max) : (ma - mx - nx) \end{aligned}$$

$$max \mp mx^2 \mp nx^2 : (ma - mx - nx) = max : (ma - mx - nx).$$

Es sey z. E. eine Ellipsis von dem andern Geschlechte, so ist $m=2$, $n=1$ (§. 258 P. I.), $PT=(3ax-3xx):(2a-3x)$, $AT=ax:(2a-3x)$.

Der 8. Zusatz.

40. Für eine Hyperbel ist $ay^2=abx \mp bxx$ (§. 260 P. I.) und daher findet ihr wie (§. 38) $PT=(2ax \mp 2xx):(a \mp 2x)$, und $AT=ax:(a \mp 2x)$.

Der 9. Zusatz.

41. Für unendliche Hyperbeln ist $ay^{m+n} = bx^m (a \mp x)^n$ (§. 286 P. I.). Derowegen findet ihr, wie (§. 39) $PT=(m \mp n)(ax \mp xx):(ma \mp mx \mp nx)$ und $AT=nax:(ma \mp mx \mp nx)$.

Der 10. Zusatz.

42. Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy=aa$ (§. 284 P. I.).

Daher $xdy \mp ydx=0$ (§. 14, 16).

$$ydx = -xdy$$

$$PT=ydx:dy=-xdy:dy=-x.$$

Also ist der Subtangens der Abscisse gleich, muß aber, weil $-x$ ist, ihrem Ursprunge entgegen gesetzt werden, das ist, wenn der

Punct,

Punct, wovon die Abscissen gerechnet werden, zur Linken der Semifordinate ist, so wird der Subtangens auf der Asymptote zu ihrer Rechten genommen.

Der 11. Zusatz.

43. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten ist $a^{m+n} = y^m x^n$ (§. 285. P. I.).

$$\begin{aligned} \text{Daher } 0 &= mx^{n-1}y^m - 1 dy + nx^{n-1}y^m dx \\ &\quad - mx^n y^{m-1} dy + nx^n y^{m-1} y^m dx \\ \text{PT} &= y dx : dy = - mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = - mx. \end{aligned}$$

Es sey eine Hyperbel von dem andern Geschlechte, so ist $m=2$, $n=1$, $\text{PT}=-2x$.

Der 12. Zusatz.

44. Endlich, weil für alle algebraische Curven (§. 214 P. I.).

$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$, so ist

$$\begin{aligned} may^{m-1} dy + nbx^{n-1} dx + rcy^{r-1} x^s dy + fcy^{r-1} x^s dx &= 0 \\ nbx^{n-1} dx + fcy^{r-1} x^s dx &= - may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy \\ dx &= (- may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy) : (nbx^{n-1} + fcy^{r-1} x^s) \\ \text{PT} & \end{aligned}$$

$PT = ydx:dy = (-may^m - rcy^rx^s):(nbx^n - 1 \mp cy^rx^s - 1)$, nach welcher Regel aller algebraischen Linien Subtangentes gefunden werden, wenn ihr für die undeterminirten Buchstaben a, c, b und die Exponenten m, n, r, s ihren Werth aus ihrer Gleichung sehet. Z. E. Weil für die Parabel von dem ersten Geschlechte

$$\begin{array}{l} ax=y^2, \text{ oder } y^2-ax=0, \text{ so ist} \\ \underline{ay^m=y^2} \quad \underline{bx^n=-ax} \quad \underline{cy^rx^s=0} \quad \underline{f=0} \\ \underline{a=1, m=2, b=-a, n=1, c=0, r=0} \quad \underline{f=0} \end{array}$$

$$\text{daher } PT = (-2 \cdot 1y^2 - 0 \cdot ay^0x^0):(-1 \cdot ax^{1-1} \mp 0 \cdot ay^0x^{0-1}) = -2y^2:-a=2ax:a=2x,$$

$$\begin{array}{l} \text{Wiederum: es sey } y^3-x^3-axy=0; \text{ so ist} \\ \underline{ay^m=y^3} \quad \underline{bx^n=-x^3} \quad \underline{cy^rx^s=-axy} \quad \underline{f=0} \\ \underline{a=1, m=3, b=-1, n=3, c=-a, r=1, f=1} \\ \text{daher } PT = (-3 \cdot 1y^3 - 1 \cdot -ayx):(3 \cdot -1x^{3-1} \mp 1 \cdot -ayx^{1-1}) = (-3y^3 \mp axy):(3x^2 \mp ay) \\ AT = (3y^3 - axy):(3x^2 \mp ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy):(3x^2 \mp ay) = (3axy - 2axy):(3x^2 \mp ay) = axy:(3x^2 \mp ay). \text{ Denn da } y^3 - x^3 = axy; \text{ so ist } 4y^3 - 3x^3 = 3axy. \end{array}$$

Der 13. Zusatz.

45. Weil $PT=ydx:dy$, $PM=y$; so ist
 $TM=\sqrt{(y^2dx^2:dy^2+y^2)}=\sqrt{(y^2dx^2+y^2dy^2):dy^2}=y\sqrt{(dx^2+dy^2):dy}$

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX, 46. Die subnormal-Linie PH in einer
 Fig. 75. algebraischen Linie zu finden.

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M rechtwinkelig ist, so ist $TP:PM=PM:PH$
 (S. 210 Geom.). $(ydx:dy):y=y:PH$.

Derowegen $PH=y^2dy:ydx=ydy:dx$.
 Wenn ihr demnach aus der Gleichung für eine besondere Linie den Werth von dy durch x exprimiret; so bekommet ihr die subnormal-Linie, wie vorhin den Subtangentem, in lauter endlichen Grössen.

Der 1. Zusatz.

47. Es sey $ax=y^2$,
 so ist $\frac{adx=2ydy}{\frac{1}{2}adx=ydy}$

$$PH=ydy:dx=adx:2dx=\frac{1}{2}a.$$

Demnach ist in der Parabel die subnormal-Linie beständig dem halben Parameter gleich,

gleich, folglich die normal=Linie $MH = \sqrt{(yy + \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(ax + \frac{1}{4}aa)}$.

Der 2. Zusatz.

48. Es sey $ax - xx = y^2$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$\frac{1}{2}adx - xdx = ydy$$

$$PH = ydy : dx = \frac{1}{2}a - x.$$

Daher ist klar, daß alle normal=Linien in dem Circul durch den Mittelpunct gehen, oder, daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen, und demnach der Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winkel macht.

Der 3. Zusatz.

49. Weil $PH = ydy : dx$, und $PM = y$; so ist $HM = \sqrt{(y^2 + y^2 dy^2 : dx^2)} = \sqrt{(y^2 dx^2 + y^2 dy^2 : dx^2)} = y \sqrt{(dx^2 + dy^2) : dx}$.

Die 5. Aufgabe.

50. Die Asymptoten einer algebraischen Linie zu determiniren. Tab. IX.
Fig. 75.

Auflösung.

1. Wenn die Abscisse AP unendlich groß wird, so ist der Tangens TM die Asymptote, als welche die krumme Linie nicht eher

V y y y y 5

eher als in einer unendlichen Weite, das ist, niemals berühren kan (S. 278 P. I.). Daher werden die unveränderlichen Grössen, in Ansehung der Abscisse x , unendlich kleine. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Grössen weglasset, die nicht mit x multipliciret sind; so findet ihr die Weite des Puncts C, aus welcher die Asymptote CD gezogen wird, von dem Scheitel-Puncte A.

B. E. In der Hyperbel ist $AT = ax : (a + 2x)$, und demnach a , in Ansehung x , unendlich kleine, folglich $ax : 2x = \frac{1}{2}a = AC$, wie schon oben (S. 272, 278 P. I.) auf andere Art ist erwiesen worden.

2. Lasset nun ferner auch in der Gleichung für die krumme Linie die unveränderlichen Grössen, welche durch keine andere multipliciret sind, weg; so könnet ihr dadurch den Werth von AE finden, und folglich die Asymptote ziehen.

B. E. In der Hyperbel ist $ay^2 = bx (a + x)$. Da nun a , in Ansehung x , unendlich klein ist, so habet ihr

$$ay^2 = bx^2$$

folglich $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

dy

$$\frac{dy\sqrt{a}=dx\sqrt{b}}{dx:dy=\sqrt{a}:\sqrt{b}.$$

Nun ist $dx:dy=AC:AE$ (§. 183 Geom.)
das ist $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\frac{1}{2}a:AE$.

Demnach ist $AE=\frac{1}{2}a\sqrt{b}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{4}aab}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{2}ab}$, wie abermal oben (§. 272, 278 P. I.) schon auf andere Art erwiesen worden ist.

Anders.

Weil $TP:PM=TA:AG$; so ist in dem Asymptotischen Falle, da TP zu CP , TA zu CA , und AG zu AE wird, $CP:PM=CA:AE$. Nun ist $TP=2x(a+x):(a+2x)$, und also $CP=2x^2:2x=x$, weil in dem asymptotischen Falle $a=a$. Daher ist $x:\sqrt{b}=\frac{1}{2}a:AE$, folglich $AE=\frac{1}{2}a\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

Zusatz.

51. In unendlichen Hyperbeln ist (§. 41) überhaupt $AT=nax:(ma+mx+nx)$. Daher $AC=nax:(mx+nx)=na:(m+x)$. Und weil ferner (§. 286 P. I.)

$$ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$$

so ist $ay^{m+n} = bx^{m+n}$

oder, wenn ihr $m+n=r$ setzt

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dx b^{1:r}$$

$$dx:dy = a^{1:r}:b^{1:r} = AC:AE$$

$$a^{1:r}:b^{1:r} = na:AE.$$

$$\begin{aligned} \text{Derowegen ist } AE &= \frac{r}{n} ab^{1:r}:ra^{1:r} \\ &= \frac{na(r-1):rb^{1:r}}{r} = (n:r) \sqrt[r]{a^r - rb}. \end{aligned}$$

Die 6. Aufgabe.

Tab. IX,
Fig. 78.

52. Den Subtangente AH in einer
Spiral-Linie zu finden.

Auflösung.

Es sey der halbe Diameter des Circuls
 $AB=a$, die Peripherie $=b$, der Bogen
 $BD=x$, $AG=y$, und AC dem radio AD
unendlich nahe; so ist $CD=dx$, $EF=dy$.
Weil nun EG ein Bogen ist, welcher mit
AG beschrieben worden; so ist

AD

$$\begin{aligned} AD : AG &= CD : EG \\ a : y &= dx : ydx : a. \end{aligned}$$

Weil EG mit FA einen rechten Winkel macht (§. 48), und AH gleichfalls auf EA perpendicular aufgerichtet worden; so ist (§. 184 Geom.).

$$\begin{aligned} FE : EG &= GA : AH \\ dy : \frac{ydx}{a} &= y : \frac{y^2 dx}{ady} \end{aligned}$$

Nun ist für die Archimedische spiral-Einie

$$\begin{aligned} &\frac{ax=by \text{ (§. 312 P. I.)}}{\text{daher } \frac{adx=bdy}{dx=bdy : a}} \\ AH &= \frac{y^2 dx : ady = by^2 : a^2 = axy : a^2 = xy : a.}{a^2} \end{aligned}$$

Der 1. Zusatz.

53. Also können ihr den Subtangente nicht finden, ihr müßet vorher den Circul-Bogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der 2. Zusatz.

54. Für unendliche spiral-Einien ist

a^2

$$n^m x^n = b^n y^m \quad (\S. 312 \text{ P. I.}).$$

$$\frac{n a^m x^{n-1} dx = m b^n y^{m-1} dy}{dx = m b^n y^{m-1} dy : n a^m x^{n-1}}$$

$$AH = y^2 dx : a dy = m b^n y^{m-1} : n a^{m+1} x^{n-1} = m a^{m+1} x^n y : n a^{m+1} x^{n-1} = m x y : n a.$$

Der 3. Zusatz.

Tab. IX.
Fig. 78.

55. Sehet, daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate. Solchergestalt ist $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, $EF = dy$.

Nun ist

$$\begin{aligned} AD : AG &= CD : EG \\ r : r-y &= dx : \frac{r dx - y dx}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FE : EG &= GA : AH \\ dy : \frac{r dx - y dx}{r} &= r-y : \frac{(r-y)^2 dx}{r dy} \end{aligned}$$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Gleichung einer algebraischen Linie sehet; so habt ihr den Subtangente AH.

3 E In der Parabel ist $ax = y^2$, und also $dx = 2y dy : a$. Derwegen wenn der Bogen BC die Abscisse einer Parabel, FC die Semiordinate, und a ihren Parameter vorstellt; so

$$\text{so ist } AH = 2(r-y)^2 y dy : r a dy = (2r^2 y - 4ry^2 + 2y^3) : ra = (2r^2 y - 4ark + 2axy) : ra = \frac{2xy - 4k}{r}$$

$$+ 2ry : a,$$

Anmerkung.

56. Ihr könnet BC für die Abscisse und FC für die Semtordinate einer jeden algebraischen Linie annehmen, und aus der allgemeinen Gleichung für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

57. Den Subtangente PT in der Con-Tab. IX. choides des Nicomedis zu finden. Fig. 79.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $Pp = MR = dx$, und $Rm = dy$. Daher ist $PT = y dx : dy$. Es sey ferner $AB = QM = a$, $CM = z$, $BC = b$; so ist $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Damit man den Werth von dx aus der Natur der krummen Linie finden möge; so setzet

$$\frac{a - x = v}{\quad} \quad \frac{a + b - x = t}{\quad}$$

$$\text{so ist } -dx = dv \quad -dx = dt$$

Ferner (S. 184 Geom.)

$$PB : MQ = PC : MC$$

$$v : a = t : z$$

$$\frac{at = vz}{\quad}$$

$$adt = z dv + v dz$$

End.

Endlich (S. 172 Geom.) $CM^2 = PC^2 + PM^2$,
das ist,

$$\begin{aligned} z^2 &= t^2 + y^2 \\ \hline 2zdz &= 2tdt + 2ydy \\ \hline zdz &= tdt + ydy. \end{aligned}$$

Setzet aus den vorhergehenden Gleichungen für dv und dt ihren Werth in den beyden letztern; so habt ihr

$$\begin{array}{rcl} -adx &= & -zdx + vdz \\ \hline zdx - adx &= & vdz \\ \hline zdx - adx &= & dz \\ \hline v & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} zdx &= & -tdx + ydy \\ \hline dz &= & -tdx + ydy \\ \hline z & & \end{array}$$

daher :

$$\begin{aligned} \frac{zdx - adx}{v} &= \frac{-tdx + ydy}{z} \\ \hline \frac{z^2dx - azdx}{v} &= \frac{-vtdx + vydy}{z} \\ \hline \frac{z^2dx - azdx + vtdx}{v} &= \frac{vydy}{z} \\ \hline dx &= \frac{vydy}{z^2 - az + vt}. \end{aligned}$$

Daher ist $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$,
und die subnormal = Linien ydy ; $dx =$
 $(z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Die

Da $v : z - a = z : \frac{(z^2 - az)}{v}$; so ist $(z^2 - az) : v$

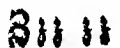
die vierte proportional-Einie zu PB, QC und CM. Wenn man nun PC verlängert, bis der verlängerte Theil ihr gleich wird; so hat man die subnormal-Einie, und kan demnach die normal-Einie und den Tangentem auf eine leichte Weise ziehen.

Die 8. Aufgabe.

§8. Den Subtangentem PT in der Cycloide zu finden. Tab. IX. Fig. 80.

Auflösung.

Es sey APB der Circul, welcher die Cycloide beschreibt, KP der Tangens des Circuls, qm der andern Einie QM unendlich nahe, und MR mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel, welchen ihr für eine gerade Linie halten können. Da nun MS = PO, und der Winkel bey R so groß wie der bey p (§. 97 Geom.), folglich, weil bey S und O rechte Winkel sind, RMS = pPO (§. 105 Geom.); so ist auch MR = Pp (§. 71 Geom.). Es sey AP = x, PM = y, so ist Pp = MR = dx, mR = ay. Nun ist Rm mit PM parallel, und daher MmR = TMP (§. 97 Geom.). Und weil MR mit TP parallel ist, so ist mRM = MPT (§. cit.), folglich (§. 183 Geom.).

(Wolfs Mathes. Tom. IV.)  mR

$$mR : MR = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{y dx}{dy}$$

Nun ist in der Cycloide (§. 310. P. I.) $y = x$,
und daher $ay = dx$, folglich $y dx : dy = y$.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. 59. Wenn ihr also den Tangentem des
Fig. 80. Circuls PK (§. 48) ziehet; so ist es auch leicht,
den Tangentem der Cycloidis TM zuziehen.

Der 2. Zusatz.

60. Lasset AP eine andere algebraische
krumme Linie seyn, derer Tangentem ihr
ziehen könnet, ihre Bogen aber AP die Ab-
scissen der transcendentischen Linie AMC; so
könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes
ziehen. Es sey Z. E.

$$\frac{bx = ay}{\text{so ist } \frac{b dx = a dy}{dx = a dy : b}}$$

$$PT = y dx : dy = ay dy : b dy = ay : b.$$

Die 9. Aufgabe.

Tab. IX. 61. Den Subtangentem TP zu der loga-
Fig. 81. rithmischen Linie zu finden.

Auf:

Auflösung.

Es sey AH die Arc, PM die Ordinate.
 Setzet $AP = x$, $PM = y$, so ist $Pp = RM = dx$, $mR = dy$, und weil die Aehnlichkeit der Triangel mRM und PMT, wie oben (§. 32), erwiesen werden kann; so ist (I. 184 Geom.).

$$\begin{aligned} mR : RM &= PM : PT \\ dy : dx &= y : \frac{y dx}{dy} \end{aligned}$$

Setzet eine andere Abscisse $= v$, die zugehörige Semiordinate $= z$; so ist der Subtangens $= z dv : dz$. Weil die Abscissen in einer arithmetischen Progression fortgehen; so ist $dx = dv$ (§. 69 Arithm.). Hingegen, weil die Semiordinaten in einer geometrischen fortschreiten (§. 306 P. I.), so ist

$$\frac{y : y + dy = z : z + dz}{\text{daher } y : dy = z : dz \text{ (§. 142 P. I.)}}$$

Nun ist $dx = dv$

$$\text{Daher } y dx : dy = z dv : dz \text{ (I. cit.).}$$

Also sind in der logarithmischen Linie alle Subtangentes einander gleich, oder der Subtangens ist eine unveränderliche Linie.

Von den größten und kleinsten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklärung.

62. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen, hernach aber wieder abnehmen, unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Gröste diejenige, wo der Wachsthum aufhöret. Ingleichen, wenn sie auf ein gewisses Ziel immer abnehmen, indem die Abscissen zunehmen, und hernach mit diesen fortwachsen, so heist diejenige die Kleinste, wo die Vergeringerung aufhöret. Die Methode, einen Werth der Abscisse in lauter unveränderlichen Grössen zu finden, dem die grösste oder kleinste Applycate oder Semiordinate zukommt, nennet man die Methode von den größten und kleinsten (*Methodum de maximis & minimis*).

Anmerkung.

63. Man kann hierdurch auch viele andere Fragen auflösen, in welchen das grösste oder kleinste unter Dingen von einer Art gesucht wird, wie es die folgenden Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 82.

64. Die grösste oder kleinste Applycate in

in einer algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

Es ist klar, daß der Tangens in dem Puncte G, wo die größte oder kleinste Applicata ist, mit der Axc parallel läuft, und daher der Subtangens unendlich groß ist. Wenn nun in allen algebraischen Linien der Subtangens $ydx : dy$ (§. 32) unendlich groß wird; so ist dy , in Ansehung des Zehlers ydx , unendlich klein, weil er dy unendliche mal in sich begreifen muß, und darum $dy = 0$ (§. 4). Suchet derowegen aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie die differential-Größe der Applicata, und setzet sie $= 0$; so könnet ihr aus dieser Gleichung den Werth von x durch gehörige Reduction finden.

In einigen Linien fällt der Tangens in Tab. IX. die Applicata CG, und alsdenn ist der Sub- Fig. 83. tangens $ydx : dy = 0$. Wenn nun dieser Bruch unendlich klein seyn soll, so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zehlers ydx . Dannenhero wann $dy = 0$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur größten Applicata giebt; so setzet $= dy \infty$, das ist, einem unendlichen Werthe, und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x .

Der 1. Zusatz.

65. Im Circul ist

$$\begin{array}{r}
 ax - xx = y^2 \\
 \hline
 a dx - 2x dx = 2y dy \\
 \hline
 (a dx - 2x dx) : 2y = dy = 0 \\
 \hline
 a - 2x = 0 \\
 \hline
 \frac{1}{2}a = x.
 \end{array}$$

Die Abscisse, welche in dem Circul der größten Applicata zugehört, ist dem halben Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

66. Für unendliche Circul ist

$$\begin{array}{r}
 max^{m-1} dx - (m+1) x^m dx = (m+1) y^m dy = 0 \\
 \hline
 max^{m-1} = (m+1) x^m \\
 \hline
 \frac{ma = (m+1)x}{ma : (m+1) = x.}
 \end{array}$$

Es sey $m=3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte, und $x=\frac{1}{4}a$.

Der 3. Zusatz.

67. Für unendliche Ellipses ist

 $(m+1)$

$$\begin{aligned}
 & (m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^ndx - \\
 & \quad nbx^m(a-x)^{n-1}dx \\
 & \hline
 & dy = mbx^{m-1}(a-x)^ndx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx \\
 & \quad : (m+n)ay^{m+n-1} = 0 \\
 & \hline
 & nbx^m(a-x)^{n-1} = mbx^{m-1}(a-x)^n \\
 & \quad \cdot x^{m-1}(a-x)^{n-1} \\
 & \hline
 & nbx = mba - mbx \\
 & \hline
 & nbx + mbx = mba \\
 & \hline
 & x = ma : (m+n).
 \end{aligned}$$

Es sey $m=1$, $n=1$, so ist es eine Ellipse von dem ersten Geschlechte und $x=\frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m=2$, $n=1$, so ist es eine Ellipse von dem andern Geschlechte und $x=\frac{2}{3}a$.

Der 4. Zusatz.

68. Es sey $x^3 + y^3 = axy$

$$\begin{aligned}
 & \text{so ist } 3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx \\
 & \hline
 & 3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy \\
 & \hline
 & (3x^2dx - aydx) : (ax - 3y^2) = dy = a \\
 & \hline
 & 3x^2 = ay \\
 & \hline
 & 3x^2 : a = y
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 27x^6 : a^3 = 3ax^3 : a = 3x^3 \\
 \hline
 27x^6 = 2a^3x^3 \\
 \hline
 27x^3 = 2a^3 \\
 \hline
 3x = a\sqrt[3]{2} \\
 \hline
 x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}.
 \end{array}$$

Der 5. Zusatz.

$$\begin{array}{r}
 69. \text{ Es sey } y - a = a^{1/3}(-x)^{2/3} \\
 \hline
 dy = -2dxa^{1/3} : 3(a-x)^{1/3} = 0 \\
 \hline
 -2a^{1/3} = 0.
 \end{array}$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = 0$ sezet, so nehmet

$$dy = -2dxa^{1/3} : 3(a-x)^{1/3} = \infty.$$

Also ist $3(a-x)^{1/3}$ in Ansehung seines Zehlers $2dxa^{1/3}$ unendlich klein. Darum habt ihr

$$\begin{array}{r}
 3(a-x)^{1/3} = 0 \\
 \hline
 a-x = 0 \\
 \hline
 a = x.
 \end{array}$$

Die II. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 75.

70. Aus dem gegebenen Puncte H in der Are einer krummen Linie an die Periphe-

ripherie eine gerade Linie HM zuziehen, welche die kleinste unter allen ist welche sich aus diesem Punkte ziehen lassen.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $AH = c$, so ist $PH = c - x$, und, weil $PM^2 + PH^2 = MH^2$ (J. 172 Geom.); $c^2 - 2cx + xx + yy = MH^2$. Nehmet MH an als die Applicato einer krummen Linie, und setzet

$$c^2 - 2cx + xx + yy = z^2$$

so ist $2x dx - 2c dx + 2y dy = 2z dz$

$$(2x dx - 2c dx + 2y dy) : 2z = dz = 0$$

$$x dx - c dx + y dy = 0.$$

Wenn ihr nun aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von $y dy$ setzet; so könnet ihr daraus AP determiniren, welcher die Applicato PM zugehöret, dahin die kürzeste Linie HM gezogen wird.

Der I. Zusatz.

71. Es sey für eine Parabel

$$ax = yy$$

so ist $adx = 2y dy$

$$\frac{1}{2} adx = y dy$$

$$x dx - c dx + y dy = x dx - c dx + \frac{1}{2} adx = 0$$

$$x - c + \frac{1}{2} a = 0$$

$$x = c - \frac{1}{2} a.$$

311 11 5

Der

Der 2. Zusatz.

72. Es sey für eine Ellipfin

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$\text{so ist } 2aydy = abdx - 2bx dx$$

$$ydy = \frac{1}{2}bdx - bxdx : a$$

$$x dx - c dx \mp ydy = x dx - c dx \mp \frac{1}{2}bdx - bxdx :$$

$$a = 0$$

$$x - c \mp \frac{1}{2}b - bx : a = 0$$

$$ax - ac \mp \frac{1}{2}ab - bx = 0$$

$$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$$

$$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b).$$

Der 3. Zusatz.

73. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac \mp \frac{1}{2}ab) : (a \mp b)$.

Die 12. Aufgabe.

Tab. VIII. 74. Eine Linie AB dergestalt in D zu-
 Fig. 67. schneiden, daß das Product aus dem
 Qua-

Quadrate des einen Theils AD in den andern DB das größte sey unter allen, welche auf dergleichen Art formiret werden können.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$, so ist $AD^2 \cdot DB = axx - x^3$. Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$$\begin{array}{r} axx - x^3 = aay \\ \text{so ist } 2axdx - 3x^2dx = aady \\ \hline (2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = 0 \\ \hline 2ax = 3x^2 \\ \hline \frac{2}{3}a = x. \end{array}$$

Die 13. Aufgabe.

75. Eine Linie AB dergestalt in D zu Tab. VII schneiden, daß das Product aus einer gegebenen Dignität des einen Theils AD in eine gegebene Dignität des andern Theils DB das größte unter allen sey, welche auf dergleichen Art formiret werden.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$; so ist $x^m(a-x)^n$ das größte von seiner Art. Setzet demnach

x^m

$$x^m(a-x)^n = a^{m+n-1}y$$

$$\text{so ist } mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx \\ = a^{m+n-1}dy$$

$$(mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx) : \\ a^{m+n-1} = dy = 0$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Die 14. Aufgabe.

76. Unter allen Parallelepipedis, welche einem gegebenen Würfel gleich sind, und deren eine Seite gegeben wird, dasjenige zu finden, welches die geringste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würfel $= a^3$, so ist die dritte $= a^3 : bx$.

Folglich die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b$. Setzet demnach, es sey in einer krummen Linie

$$2bx$$

$$2bx \mp 2a^3 : x \mp 2a^3 : b = ay$$

$$\text{so ist } 2b dx - 2a^3 dx : x^2 = a dy = 0$$

$$2b - 2a^3 : x^2 = 0$$

$$bx^2 = a^3$$

$$x^2 = a^3 : b$$

$$x = \sqrt{a^3 : b}.$$

Also sind die drey Seiten b , $\sqrt{a^3 : b}$ und $a^3 : b \sqrt{a^3 : b} = \sqrt{a^6 : \sqrt{b^2 a^3 : b}} = \sqrt{a^6 : \sqrt{a^3 b}} = \sqrt{a^3 : b}$.

Die 15. Aufgabe.

77. Unter allen Parallelepipedis, welche einem gegebenen Würfel gleich sind, dasjenige zu finden, welches die kleinste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey der gegebene Würfel $= a^3$, die eine Seite $= x$, so sind die beyden andern Seiten (§. 76) $\sqrt{a^3 : x}$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $= 2a^3 : x \mp 4 \sqrt{a^3 x}$. Da nun dieses die kleinste von ihrer Art ist, so setzet die Gleichung für eine krumme Linie

$$2a^3$$

$$\begin{array}{r}
 2a^3 : x \mp 4\sqrt{a^3x} = ay \\
 \hline
 \text{so ist } -2a^3dx : x^2 \mp 2a^3dx : \sqrt{a^3x} = ady \\
 \hline
 -2a^2dx : x^2 \mp 2a^2dx : \sqrt{a^3x} = 0 \\
 \hline
 a^2 : \sqrt{a^3x} = a^2 : x^2 \\
 \hline
 x^2 = \sqrt{a^3x} \\
 \hline
 x^4 = a^3x \\
 \hline
 x^3 = a^3 \\
 \hline
 x = a.
 \end{array}$$

Also hat der Würfel selbst die kleinste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

78. Unter allen Kegeln, welche innerhalb einer Kugel beschrieben werden können, denjenigen zudeterminiren, welcher die größte Fläche hat.

Auflösung.

Tab. X.
Fig. 84.

Es ist klar, daß, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter AB wendet, derselbe eine Kugel, die Triangel aber ANP, AFE &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommt heraus, wenn ihr die Seite des Kegels FA durch die halbe Peripherie, welche mit dem Radio FE beschrieben worden ist, multipliciret. Weil ihr nun die größte von ihrer Art suchet, so setzet

AE=

$AE=x$, $AB=a$, und es ist $FE=\sqrt{(ax-xx)}$ (J. 210 Geom.) die halbe Peripherie $m\sqrt{(ax-xx)}$, $AF=\sqrt{ax}$. Derowegen habt ihr die Gleichung für eine krumme Linie.

$$\begin{array}{r} m\sqrt{(ax-xx)}\sqrt{ax}=ay \\ \hline m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}=ay \\ \hline 2ma^2xdx-3max^2dx:2\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}=ady \\ \hline 2ax-3x^2=0 \\ \hline 2a=3x \\ \hline \frac{2}{3}a=x. \end{array}$$

Ende des andern Theils.



Der dritte Theil,
 von den
 Anfangs-Gründen
 der
Integral-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

79. **D**ie integral-Rechnung ist eine Wissenschaft; aus einer gegebenen unendlich kleinen Grösse diejenige endliche zu finden, durch deren Differentiirung sie entsteht.

Zusatz.

80. Derwegen habt ihr eine gewisse Probe, ob ihr die rechte Grösse gefunden habt, wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret, und die gegebene Differential wieder heraus kommt.

Die 2. Erklärung.

81. Integriren oder Summiren heißt die Grösse finden, aus welcher durch Differentiirung die gegebene unendlich kleine entstanden ist.

Die 1. Aufgabe.

82. Eine gegebene Differential zu integriren oder zu summiren.

Auf

Auflösung.

Gleichwie man die Differentialen der veränderlichen Grössen durch d andeutet; so pflegt man die Integralen derselben, als die Summe unendlich kleiner Grössen, durch \int anzudeuten. Daher heisst $\int y dx$ so viel als die Integrale von $y dx$.

Wenn ihr nun die Integrale finden wollet, so vergleichet die gegebene Differentiale mit denen, welche ihr oben (S. 13 & seqq.) gefunden habt: so werdet ihr bald wahrnehmen, wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

$$\text{I. } \int dx = x + a$$

$$\text{II. } \int (dx + dy) = x + y + a \text{ oder } x + y$$

$$\text{III. } \int (x dy + y dx) = xy$$

$$\text{IV. } \int m x^{m-1} dx = x^m$$

$$\text{V. } \int (n; m) x^{n-m} dx = x^{n-m}$$

$$\text{VI. } \int (y dx - x dy) : y^2 = x : y.$$

Von diesen Formeln seyd ihr gewiß, daß sie sich alle integriren lassen, und zwar setzet ihr in dem andern und ersten Falle nur an statt dx oder dy die veränderliche Grösse x oder y selbst. In dem dritten multipliciret ihr die beyden veränderlichen Grössen xy durcheinander, wodurch ihre Differentialen dy und dx multipliciret sind. In dem vierten und fünften, (welcher der gewöhnlichste (Wolfs Mathes. Tom. IV.) A a a a a ist)

ist) addiret ihr zu dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Grösse 1, und durch den vermehrten und die Differentiale der veränderlichen Grösse dividiret ihr die gegebene Differentiale. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Grösse mit dem Zeichen — für den Zehler, und die Wurzel von dem Quadrate des Nenners für den Nenner an.

Die 1. Anmerkung.

83. Es können zwar noch viele andere Fälle vorkommen, welche hier nicht berührt werden: allein ihr werdet es besser aus Exempeln, als durch weitläufige Regeln lernen.

Die 2. Anmerkung.

84. Mercket aber, daß einige Grössen sind, welche sich nicht integriren lassen. Denn, wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Grössen zu einer verlangten Dignität erheben, nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurzel ziehen kann; eben so kann man in der höhern Analysis zwar eine jede veränderliche Grösse differentiiren, allein nicht eine jede Differentiale summiren. Gleichwie man aber in der gemeinen Algebra die Wurzel durch Näherung sucht, eben so pflegt man in der höhern die Integrale durch Näherung zusehen, wo man sie nicht vollkommen haben kann. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel, aus welcher man schliessen könnte, ob die Summation statt findet, oder nicht, und können wohl einige Differentialen zum Summiren geschickt seyn, welche wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Don

Von den Quadraturen der krummen
Linien.

Die 3. Erklärung.

85. Die Differentiale oder das Element Tab. IX.
einer ebenen Fläche, welche in eine krum. Fig. 75.
me und zwei gerade Linien eingeschlossen
ist, als AMP, ist das Rectangulum aus
der Semiordinate PM in die Differentiale
der Abscisse Pp.

Der 1. Zusatz.

86. Derowegen, wenn die Semiordi-
nate $PM = y$, $AP = x$, so ist $Pp = dx$, und
das Rectangulum $PMRp = ydx$.

Der 2. Zusatz.

87. Weil die Semiordinaten PM und
pm einander unendlich nahe sind, so ist ihre
Differenz mR, in Ansehung ihrer, nichts
(S. 4), und daher das Rectangulum PMRp
dem Trapezio PMmp gleich (S. 5). Da
ihr nun die Figur in unendliche solche Tra-
pezia resolviren könnet; so ist $\int ydx$ der In-
halt der Fläche AMP.

Der 3. Zusatz.

88. Derowegen, wenn ihr aus der Glei-
chung für eine krumme Linie den Werth von
 y sehet, und ihr könnet die Differentiale der
Fläche integriren, so habt ihr die Quadra-
dratur der Fläche gefunden.

Q a a a a a

Die

Die 2. Aufgabe.

89. Den Inhalt eines Triangels zu finden.

Auflösung.

Tab. IX.
Fig. 75.

Wenn ihr die krumme Linie AM als eine gerade ansehet, so ist AMP ein Triangel, und daher auch sein Element ydx . Sehet nun die Höhe des Triangels, von welchem x ein Theil ist, $= a$, die Grund-Linie, welche mit PM oder y parallel ist, $= b$; so ist (§. 184 Geom.) $a:b=x:y$, folglich

$$\begin{array}{r} ay = bx \\ \hline y = bx : a \\ \hline ydx = bxdx : a \\ \hline \int ydx = bx^2 : 2a \quad (\S. 82). \end{array}$$

Wenn ihr nun den ganzen Triangel verlangt, so sehet für den Theil der Höhe x , die ganze Höhe a , und ihr findet den Inhalt $ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab$.

Anmerkung.

90. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben, damit ihr sehet, daß durch die integral-Rechnung, deren Gründe den Anfängern zuerst zweifelhaft scheinen, weil man den Triangel MmR für nichts ansehet, eben das gefunden wird, was in der gemeinen Geometrie aus andern Gründen erwiesen worden ist.

Die 3. Aufgabe.

91. Die Parabel zuquadriren.

Auf:

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} &= y \\ \frac{y}{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} &= 1 \\ ydx &= a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx \\ \int ydx &= \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} = \frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2} \\ &= \frac{2}{3}xy. \end{aligned}$$

Zusatz.

92. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Abscisse AP, wie $\frac{2}{3}xy$ zu xy , das ist, wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

93. Unendliche Parabeln auf einmal zuquadriren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$\begin{aligned} \frac{a^{m+r}x^{n+r}}{a^{m+r}x^{n+r}} &= y^r \\ \frac{y}{a^{m+r}x^{n+r}} &= 1 \\ ydx &= a^{m+r}x^{n+r}dx \\ \int ydx &= \frac{r}{n+r}a^{m+r}x^{n+r} = \frac{r}{n+r}yx. \end{aligned}$$

Qaa aaa 3

S. C.

3. E. Es sey eine Parabel von dem andern Geschlechte, so ist $a^2x = y^3$, daher $r=3$, $x=1$, folglich $\int y dx = \frac{2}{3}xy$.

Die 5. Aufgabe.

Tab. IX. 94. Das Stück von der Parabel PMNS
Fig. 75. zuquadriren.

Auflösung.

Es sey die unveränderliche Linie $AP=b$, $PS=x$, $SN=y$, der Parameter $=a$; so ist $AS=b+x$, und (§. 217 P. I.).

$$\begin{aligned} ab+ax &= y^3 \\ \sqrt{ab+ax} &= y \\ dx \sqrt{ab+ax} &= y dx. \end{aligned}$$

Damit man dieses Element integriren kann; so setze

$$\begin{aligned} \sqrt{ab+ax} &= v \\ \text{so ist } ab+ax &= v^2 \\ ax &= v^2 - ab \\ dx &= 2v dv : a \\ dx \sqrt{ab+ax} &= 2v^2 dv : a \\ \int y dx &= \frac{2}{3} v^3 : a = \frac{2}{3} (b+x) \sqrt{ab+ax}. \end{aligned}$$

Weil

Weil x in $P=0$ wird, und auch der Raum PSNM nichts werden muß, wenn $x=0$; hingegen, wenn ihr in der gefundenen Summe $x=0$ sehet, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig bleibt; so ist klar, daß ihr von dem gefundenen Werthe $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ noch abziehen müßet, damit ihr den Inhalt von dem Raume PMNS $=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ bekommt. Nämlich $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$ ist der ganze parabolische Raum ANS, und $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ das Stück AMP; folglich der Unterscheid PMNS.

Es könnte auch AS von beständiger Grösse angenommen, und x von S angerechnet werden. Wenn nun $AS=b$, $SP=x$; so ist $PA=b-x$, folglich (weil $PM=y$)

$$\begin{aligned} ab-ax &= y^2 \\ \sqrt{(ab-ax)} &= y \\ dx\sqrt{(ab-ax)} &= ydx. \end{aligned}$$

Sehet wie vorhin,

$$\begin{aligned} ab-ax &= v^2 \\ \text{so ist } -adx &= 2v dv \\ dx &= -2v dv : a \\ dx\sqrt{(ab-ax)} &= -2v^2 dv : a \\ \int y dx &= -\frac{2}{3}v^3 : a = -\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}. \end{aligned}$$

Uaa aaa 4

Ge=

Setzt ferner, wie vorhin, $x=0$; so bleibt $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig, und demnach müßet ihr $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ addiren, damit der Inhalt des Raums PMNS herauskommt. Nämlich $ANS = \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, und $APM = \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$; folglich $PMNS = \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

Zusatz.

95. Wenn also die Gleichung für eine Krümme Linie gegeben wird, und man nicht weiß, wo x in der Ase seinen Anfang hat: so erhellet aus der Auflösung, daß man nur $x=0$ setzen darf, um zu finden, ob noch etwas zu addiren oder zu subtrahiren übrig bleibt.

Die 6. Aufgabe.

96. Eine Linie zuquadriren, in welcher $xy^3 = a^4$.

Auflösung.

Weil $xy^3 = a^4$;

so ist $y^3 = a^4 : x = a^4 x^{-1}$

$$y = a^{4/3} x^{-1/3}$$

$$y dx = a^{4/3} x^{-1/3} dx$$

$$\int y dx = \frac{3}{2} a^{4/3} x^{2/3} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2}.$$

Die

Die 7. Aufgabe.

97. Die krumme Linie des *Cartesii* (Tom. 3 Epist. p. 219) zuquadriren, in welcher $b^2; x^2 = b - x; y$.

Auflösung.

Weil $b^2y = bx^2 - x^3$

so ist $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$

$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2.$

Die 8. Aufgabe.

98. Die krumme Linie zuquadriren, deren Gleichung ist $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4 = a^4y$.

Auflösung.

Weil $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

so ist $ydx = (x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a)$

$dx, \int ydx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax.$

Die 9. Aufgabe.

99. Eine krumme Linie zuquadriren, in welcher $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^4 + a^2x^2;$

so ist $y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}.$

U a a a a a 5

Da

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so setze

$$x^2 + a^2 = v^2,$$

$$\text{so ist } 2x dx = 2v dv$$

$$x dx + \sqrt{(a^2 + x^2)} = v^2 dv$$

$$\int x dx \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{1}{3} v^3 = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Setze nun $x = 0$, so bleibt $\frac{1}{3} a^3$ übrig.
Solchergehalt ist $\int y dx = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{1}{3} a^3$ (§. 94).

Die 10. Aufgabe.

100. Eine krumme Linie zuquadriren, in welcher $y^2 = x^3 + ax^2$.

Auflösung.

$$\text{Weil } y^2 = x^3 + axx;$$

$$\text{so ist } y = x \sqrt{x + a}$$

$$y dx = x dx \sqrt{x + a}.$$

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so setze

$$x + a = v^2$$

$$\text{so ist } x = v^2 - a$$

$$dx = 2v dv$$

$$x dx \sqrt{x + a} = 2v^4 dv - 2av^3 dv$$

$$\int x dx \sqrt{x + a} = \frac{2}{5} v^5 - \frac{2}{3} av^3 = \frac{2}{5} (xx + 2ax + aa) - \frac{2}{3} a$$

$$-\frac{2}{3}(ax+aa))\sqrt{(x+a)}=(\frac{6}{15}(xx+2ax+aa)-\frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)}=(6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15+\frac{4}{15}a^2\sqrt{a}(\S. 94).$$

Die 11. Aufgabe.

101. Eine krumme Linie zuquadriren,
in welcher $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Auflösung.

$$\text{Weil } y^2 = x^2 : (x+a),$$

$$\text{so ist } y = x : \sqrt{(x+a)}$$

$$ydx = xdx : \sqrt{(x+a)}.$$

$$\text{Setzet } \sqrt{(x+a)} = v;$$

$$\text{so ist } x+a = v^2$$

$$x = v^2 - a$$

$$dx = 2v dv$$

$$x dx : \sqrt{(x+a)} = (2v^3 dv - 2av dv) : v \\ = 2v^2 dv - 2a dv,$$

$$\int x dx : \sqrt{(x+a)} = \frac{2}{3}v^3 - 2av = (\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a - 2) \\ \sqrt{(x+a)} = (\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}a) \sqrt{(x+a)} = \sqrt{(4x^3 - 12ax + 16a^3 : 9)} = \frac{2}{3} \sqrt{(x^3 - 3axx + 4a^2 - \frac{4}{3}a \sqrt{a}} (\S. 94).$$

Die

Die 12. Aufgabe.

102. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zuquadriren.

Auflösung.

Für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$a^2 = by + xy \quad (\S. 287 \text{ P. I.}).$$

$$\text{Daher } a^2 : (b + x) = y$$

$$y dx = a^2 dx : (b + x).$$

Damit dieses Element zu dem Integriren geschikt werde, so dividiret in der That

$$\begin{array}{r} b+x) \quad a^2 \left\{ \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \&c. \right. \\ \underline{a^2 + a^2 x : b} \\ b+x) \quad -a^2 x : b \\ \underline{-a^2 x : b - a^2 x^2 : b^2} \\ b+x) \quad +a^2 x^2 : b^2 \\ \underline{+a^2 x^2 : b^2 + a^2 x^3 : b^3} \\ b+x) \quad -a^2 x^3 : b^3. \end{array}$$

$$\text{Denn ist } a^2 dx : (b + x) = \frac{a^2 dx}{b} - \frac{a^2 x dx}{b^2} +$$

$$\frac{a^2 x^2 dx}{b^3} - \frac{a^2 x^3 dx}{b^4} \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Folgt

Folglich habt ihr $\int y dx = \frac{a^2 x}{b} - \frac{a^2 x^2}{2b^2} +$

$\frac{a^2 x^3}{3b^3} - \frac{a^2 x^4}{4b^4}$ u. f. w. unendlich fort, das ist,

wenn ihr $a=b=1$ setzt, $x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ &c.

Anmerkung.

103. Diese Quadratur der Hyperbel hat zuerst *Nic. Mercator* in seiner *Logarithmotechnia* gegeben, welcher die unendlichen Reihen zu Quadrirung der Figuren zuerst gebraucht hat, welche man nicht genau quadriren kan.

Die 13. Aufgabe.

104. Den Circul zuquadriren.

Auflösung.

Die Gleichung für den Circul ist

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad (\S. 198 \text{ P. I.})$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$y dx = dx \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Zieheth aus $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurzel, so findet ihr ($\S. 97 \text{ P. I.}$) $y dx = a dx - \frac{x^2 dx}{2a}$

$$\frac{x^4 dx}{8a^3} - \frac{x^6 dx}{16a^5} - \frac{5x^8 dx}{128a^7} \text{ u. f. w. unendlich fort,}$$

dessen

dessen Integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} -$

Tab. X. $5x^9$ u. s. w. unendlich fort den Theil des
Fig. 84. $\frac{1152a^7}{\text{Circulus BNP ausdrückt.}}$

Wenn ihr für x den halben Diameter a sehet, so kommt der Werth des Quadranten $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ u. s. w.

Sehet $a = \frac{1}{2}$, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und demnach der ganze Circul $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anders.

Tab. II. Es sey CB der Tangens des halben Bogens
Fig. 15. GB = x , der halbe Diameter BA = a ,
so ist BD der Tangens des ganzen Bogens
BG = $2ax : (a^2 - xx)$ (§. 190 P.I.), folglich
DA = $(a^2 + ax^2) : (aa - xx)$ (§. cit.).
Nun ist (§. 185 Geom.) DA : DB = GA : GH,
und AD · AB = AG : AH : darum findet ihr
GH = $2a^2x : (a^2 + x^2)$, und AH = $(a^2 - ax^2) : (aa + xx)$, endlich BH = AB - AH = $2ax^2 : (aa + xx)$.
Wenn ihr der beiden Differential-Größen von GH und BH, nemlich
 $(2a^4dx - 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2$ und $4a^3x^2dx : (a^2 + x^2)^2$, Quadrate
 $(4a^8dx^2 - 8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ und $16a^6x^2dx^2 : (a^2 + x^2)^4$
zusam-

zusammen sehet, und aus der Summe $(4a^8dx^2 + 8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ die quadrat=Wurzel $(2a^4dx^2 + 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2 = 2a^2dx : (a^2 + x^2)$ ziehet; so habt ihr die Differentiale des Bogens GB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommt das Element des Sectoris BGA (§. 171 Geom.) heraus $a^3dx : (a^2 + x^2)$. Setzet $a=1$; so ist das Element $dx : (1 + x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division, wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 102)

$$1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$$

u. s. w. unendlich fort, und folglich $\int dx :$

$$(1 + x^2) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$$

u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe ist für den Ausschnitt BAG, dessen halben Bogens Tangens $BC=x$ ist. Nun ist der Tangens des halben Quadranten dem Radio gleich. Derowegen, wenn ihr $x=1$ sehet, so ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadranten. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des ganzen Circuls.

Anmerkung.

105. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr *Newton*; die andere der Herr von *Leibnitz* gefunden, und ist auch schon vorher *Jacob Gregorius* dar-
auf

auf gekommen, ob er sie gleich nicht in Schriften publiciret hat.

Die 14. Aufgabe.

Tab. III.
Fig. 27.

106. Die Ellipfin zuquadriren.

Auflösung.

Es sey $AC=a$, $DC=b$, $PC=x$, $PM=y$;
so ist $AP=a-x$, $PB=a+x$, und aus
der Natur der Ellipsis

$$AP \cdot PB : AC^2 = PM^2 : CD^2 \quad (\S. 251 \text{ P. I.})$$

$$aa - xx : aa = yy : bb$$

$$anyy = bb(aa - xx)$$

$$y = b \sqrt{(aa - xx)} : a$$

$$ydx = bdx \sqrt{(aa - xx)} : a.$$

$$\text{Nun ist } \sqrt{(aa - xx)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} -$$

$5x^8$ u. f. w. unendlich fort (§. 97 P. I.).

$$128a^7$$

Derwegen ist $bdx \sqrt{(aa - xx)} : a = bdx$
 $-\frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ u. f. w.

unendlich fort. Folglich ist $\int ydx = bx$
 $-\frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ u. f. w. un-

endlich fort.

Wenn ihr für x die halbe Ase a sehet,
so bekommet ihr für den Quadranten der
El.

Ellipsis $ab = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{1}{1152}ab$
u. s. w. unendlich fort, und also für die ganze
Ellipsis eben dieselbe Reihe, wenn ihr a
für die ganze große, und b für die ganze kleine
Axe annehmet.

Der 1. Zusatz.

107. Wenn ihr $\sqrt{ab} = 1$ sehet, so kommt
die Reihe für den Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$
u. s. w. heraus (§. 104). Derowegen
ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen
Diameter die mittlere proportional-Linie
ist zwischen seiner kleinen und großen Axe,
und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul,
welcher mit der großen Axe beschrieben
wird, wie die kleine Axe zu der großen.

Der 2. Zusatz.

108. Daher dependiret die Quadratur
der Ellipsis von der Quadratur des Circuls.

Die 1. Anmerkung.

109. Die Quadratur des Circuls, der Ellipsis
und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen
Werth gegeben.

Die 2. Anmerkung.

110. Aus der gefundenen Quadratur der Ellipsis
läßt sich nun ferner der Lehrsatz erweisen, welchen
wir in der Astronomie (§. 419) angenommen haben,
daß nemlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem
Sectore CAP verhalte, wie der Circul zu der Ellipsi.
Denn es ist klar, daß CLP sich zu KLP verhalte, Tab. X.
wie $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ zu $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ (§. 104, 106), Fig. 85.

$\frac{a}{a}$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.). B b b b b b folgt

folglich wie b zu a (§. 144 P. 1.), oder RE zu DR. Die Triangel aber CAL und KAL verhalten sich, wie CL zu KL (§. 170 Geom.), oder wie RE zu DR, folglich so wohl sie als die Abschnitte PLC und PLK wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 107). Folglich ist $KAL + KLP$ zu $CAL + CLP$ wie der Circul zu der Ellipsi (§. 142 P. 1.).

Die 3. Anmerkung.

111. Daß aber $LC:LK = RE:DR$, läßt sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist $LC = b\sqrt{(aa - xx)}:a$, und $LK = \sqrt{(aa - xx)}$. Daher $LC:LK = b\sqrt{(aa - xx)}:a\sqrt{(aa - xx)} = b:a = RE:DR$.

Die 15. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 81.

112. Den Raum HPMI zwischen der logarithmischen Linie MI und ihrer Arc PH zu finden.

Auflösung.

Es sey $PM = y$, $Pp = dx$, der Subtangens $= a$ (§. 61); so ist $ydx:dy = a$.

$$\frac{ydx = a dy}{\int ydx = ay}.$$

Der I. Zusatz.

113. Setzet $QS = z$, so ist $HQIS = az$, folglich $PQSM = ay - az = a(y - z)$, das ist, dem Rectangulo aus dem Subtangente in die Differenz der Semiordinaten PM und QS.

Der

Der 2. Zusatz.

114. Derwegen verhalten sich die Räume zwischen beyden Semiordinaten, wie ihre Differenzen.

Die 16. Aufgabe.

115. Die spiral-Linie zuquadriren.

Tab. IX.
Fig. 78.

Auflösung.

Es sey alles, wie in der 6. Aufgabe (S. 52), so ist $EG = ydx : a$, folglich der kleine Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2 dx : 2a$. Nun ist für die spiral-Linie (J. 312 P. I.).

$$\begin{array}{r} ax = by \\ \hline a^2 x^2 : b^2 = y^2 \\ \hline y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2bb \\ \hline \int y^2 dx : 2a = ax^3 : 6bb. \end{array}$$

Wenn ihr für x die ganze Peripherie b sehet, so kommt für den Raum, welchen die ganze spiral-Linie einschließet, $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

116. Da nun der umschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist, so verhält sich die spiral-Fläche zu ihm, wie $\frac{1}{6}ab$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie 1 zu 3 (J. 144 P. I.).

Bbb bbb 2 Der

Der 2. Zusatz.

117. Für unendliche spiral-Linien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \quad (\S. 312 \text{ P. I.})$$

$$\frac{ax^{n:m}}{a^2 x^{2n:m}} : \frac{b^{n:m}}{b^{2n:m}} = y$$

$$\frac{a^2 x^{2n:m}}{a^2 x^{2n:m}} : \frac{b^{2n:m}}{b^{2n:m}} = y^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = \frac{m}{2n+m} x^{2n+m} : (4n+2m) b^{2n:m}$$

Wenn ihr nun für x die ganze Peripherie b sehet, so bekommt ihr $\frac{mab^{2n+m}}{2mb^{2n:m}} : (4n+2m) = \frac{mab}{(4n+2m)}$.

Der 3. Zusatz.

118. Dannenhero verhält sich überhaupt die spiral-Fläche zu dem umschriebenen Circul, wie $mab : (4n+2m)$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie $2m$ zu $4n+2m$, oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

Tab. IX. 119. Sehet, daß der Bogen BC sich zu
Fig. 78. EC verhalten solle, wie die Abscisse in einer
algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und es sey der Bogen $BC = x$, $AE = y$,
 $AC = r$; so ist $EC = r - y$, $CD = dx$ und

$$AC : CD = AE : EG$$

$$r : dx = y : ydx : r$$

folglich das Element oder der Sector AEG
 $\frac{1}{2}y^2$

$\frac{1}{2}y^2dx:r$. Setzet nun, es sey BC die Abscisse, EC die Semiordinate einer Parabel, so ist

$$\begin{aligned} ax &= r^2 - 2ry + yy \\ dx &= (2ydy - 2r dy):a \\ \frac{1}{2}y^2dx:r &= (y^3dy - ry^2dy):ar \\ \int \frac{1}{2}y^2dx:r &= y^4:4ar - y^3:3a. \end{aligned}$$

Der 5. Zusatz.

120. Ihr könnet auch den Raum BFC Tab. IX. finden, wenn ihr das Element GDCE Fig. 78. findet, welches ihr findet, wenn ihr CD + EG mit $\frac{1}{2}FC$ multipliciret (*S. 157 Geom.*), weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnet, dessen bases CD und EG parallel sind. Nun ist CD + EG = $dx + ydx:r$, und $\frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(r^2dx - y^2dx):2r$. Nehmet nun, wie in dem vorigen Exempel (*S. 119*), $dx = (2ydy - 2r dy):a$, so ist das besondere Element $(ry^2dy + r^2ydy - y^3dy - r^3dy):ar$, dessen Integrale $y^3:3a + ry^2:2a - y^4:4ar - r^2y:a$ den verlangten Raum giebt.

Die 17. Aufgabe.

121. Die Fläche eines jeden Körpers Tab. IX. zu finden, welcher erzeugt wird, indem Fig. 75. eine krumme Linie sich um ihre Axe bewegt.

Bbb bbb 3

Auf:

Auflösung.

Setzet die Verhältniß des halben Diameters zu der Peripherie $= r : c$, die Abscisse $AP = x$, die Semiordinate $PM = y$, so ist $Pp = dx$, $mR = dy$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (*J. 172 Geom.*) und die Peripherie, welche mit PM beschrieben wird, $= cy : r$. Daher das Element der Fläche $cy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$. Wenn ihr nun für dx^2 oder dy^2 seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setzet, und das Element hernach integrirt; so kommt der Inhalt eines Stücks von der verlangten Fläche heraus.

Der I. Zusatz.

Tab. IX.
Fig. 75.

122. Es sey AMP ein Triangel, dessen Höhe $= a$, die Grundlinie $= r$, so ist $ay = rx$ (*J. 184 Geom. & J. 137 P. I. Algebr.*), und dannenhero

$$\begin{array}{r} ady : r = dx \\ \hline a^2 dy^2 : r^2 = dx^2 \\ \hline cy \sqrt{(dx^2 + ay^2)} : r = cy \sqrt{(a^2 dy^2 + r^2 dy^2)} : r^2 \\ \hline cy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy dy \sqrt{(a^2 + r^2)} : r^2 \\ \hline fcy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy^2 \sqrt{(a^2 + r^2)} : 2r^2. \end{array}$$

Setzet für y die Grund-Linie r : so kommt die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}c \sqrt{(r^2 + a^2)}$. Da nun

nun $\sqrt{(r^2 + a^2)}$ seine Seite ist: so sehet ihr, daß die Kegel-Fläche einem Triangel gleich sey, dessen Grund-Linie die Peripherie der Grund-Fläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

123: Wenn ihr für die beschreibende Linie einen halben Circul annehmet, so findet ihr die Kugel-Fläche. Da nun im Circul.

$$\begin{array}{l}
 2rx - xx = y^2 \\
 \hline
 \text{so ist } 2r dx - 2x dx = 2y dy \\
 \hline
 (r dx - x dx) : y dy \\
 \hline
 (r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : y^2 = dy^2 \\
 \hline
 cy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy \sqrt{(dx^2 + (r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2)) : (2rx - xx)} : r = cy \sqrt{((2r x dx^2 - x^2 dx^2 + r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx))} : r = cy \sqrt{(r^2 dx^2 : y^2)} : r = cy r d \\
 x : ry = c dx. \\
 \hline
 \int c dx = cx.
 \end{array}$$

Sehet für x den Diameter $2r$, so ist die ganze Kugel-Fläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

124. Da nun die Fläche des größten Circuls $\frac{1}{2}cr$; so ist die Fläche der Kugel viermal

Bbb bbb 4

mal so groß als ihr größter Circul. Hin-
gegen jedes Stück der Kugel-Fläche ver-
hält sich zu der ganzen, wie cx zu $2cr$, das
ist, wie x zu $2r$, oder die Höhe des Stückes
der Kugel zu dem ganzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

125. Es sey die beschreibende Linie eine
Parabel, so findet ihr die Fläche eines pa-
rabolischen Auster-Regels. Da nun in der
Parabel

$$adx = 2ydy$$

$$\text{so ist } dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$cy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy \sqrt{(4y^2 dy^2 + a^2 dy^2)} : a^2 : r = cy dy \sqrt{(4yy + aa)} : ar.$$

$$\text{Setzet } \sqrt{(4yy + aa)} = v$$

$$\text{so ist } 4yy + aa = v^2$$

$$8ydy = 2v dv$$

$$cy dy \sqrt{(4yy + aa)} : ar = cv^2 dv : 4ar$$

$$\int cv^2 dv : 4ar = cv^3 : 12ar = (4cyy + caa) \sqrt{(4yy + aa)} : 12ar - ca^2 : 12r \text{ (§. 94).}$$

Setzet r für y , so habt ihr die Fläche des
ganzen Auster-Regels $(4crr + caa) \sqrt{(4rr + aa)} : 12ar - ca^2 : 12r$.

Don

Von der Rectification der
krummen Linien.

Die 4. Erklärung.

126. Eine krumme Linie rectificiren
heißt so viel, als die Länge derselben
finden.

Der 1. Zusatz.

127. Wenn die beyden Semiordinaten Tab. IX,
PM und pm einander unendlich nahe sind, Fig. 75.
so ist der Bogen Mm das Element des Bo-
gens AM, das ist, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Der 2. Zusatz.

128. Derwegen, wenn ihr vor dx^2 oder
 dy^2 den Werth aus der Natur der krum-
men Linie sehet, und das besondere Element
integrirt; so habt ihr die krumme Linie oder
ihren Bogen rectificirt.

Der 3. Zusatz.

129. Ihr könnet auch das Element Mm
finden, wenn ihr sehet $PM : TM = dy :$
Mm.

Die 18. Aufgabe.

130. Die Parabel zurectificiren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$\frac{adx = 2ydy}{}$$

$$\frac{a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2}{}$$

$$\frac{dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2}{}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2 dy^2 : a^2)}$$

$$\text{das ist,} = dy \sqrt{(aa + 4y^2) : a}$$

Damit ihr nun dieses Element integrieren könnet, so ziehet (§. 95 P. I.) die Wurzel aus $(aa + 4y^2)$. Es ist nemlich

$$n=2, m=1, P=a^2, Q=4y^2 : a^2$$

$$P^{m:n} = \frac{1}{2} a = A$$

$$\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} a \cdot 4y^2 : a^2 = \frac{1}{2} 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = -\frac{1}{2} y^2 : a \cdot 4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} C Q = -\frac{2}{3} - 2y^4 : a^3 \cdot 4y^2 : a^2 = -\frac{1}{3} 4y^6 : a^5 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} D Q = -\frac{1}{4} 4y^6 : a^5 \cdot 4y^2 : a^2 = -\frac{1}{4} 16y^8 : a^7$$

u. s. w. unendlich fort.

$$\text{Demnach ist } \sqrt{(aa + 4y^2)} = a + \frac{2y^2}{a} -$$

$$\frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{16y^8}{a^7} \&c. \text{ und daher } dy \sqrt{(aa + 4y^2)}$$

+ 4

$$\begin{aligned}
 + 4y^2) : a = dy + \frac{2y^2 dy}{a^2} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} \\
 - \frac{10y^8 dy}{a^8} \text{ \&c. } \text{ Deren Integral } y + \frac{2y^3}{3a^2} - \\
 \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8} \text{ \&c. } \text{ Die Länge des } \\
 \text{ Bogens exprimiret.}
 \end{aligned}$$

Die 19. Aufgabe.

131. Die Parabel zu rectificiren, in welcher $ax^2 = y^3$.

Auflösung.

$$\text{Weil } ax^2 = y^3$$

$$\text{so ist } 2axdx = 3y^2 dy$$

$$4a^2 x^2 dx^2 = 9y^4 dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4 dy^2 : 4a^2 x^2 = 9y dy^2 : 4a$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{((9y dy^2 + 4a dy^2) : 4a)} = dy \sqrt{((9y + 4a) : 4a)}.$$

$$\text{Setzet } \sqrt{((9y + 4a) : 4a)} = v$$

$$\text{so ist } 9y + 4a = 4av^2$$

$$9dy = 8av dv$$

dy

$$\begin{aligned} dy \sqrt{(9y+4a, : 4a)} &= \frac{8}{3} av^2 dv \\ \hline \int dy \sqrt{(9y+4a, : 4a)} &= \frac{8}{27} av^3 = \frac{8}{27} (9y+4a, : 4a)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{27} (9y+4a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(9y+4a)} \\ &= \frac{8}{27} (9y+4a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(9y+4a)} - \frac{8}{27} (\S. 94), \text{ wenn } y=0. \end{aligned}$$

Die 20. Aufgabe.

132. Unendliche Parabeln rectificiren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$$\begin{aligned} y^n &= a^{n-1}x = x, \text{ wenn } a=1. \\ \hline ny^{n-1}dy &= dx \\ \hline n^2y^{2n-2}dy^2 &= dx^2 \\ \hline \sqrt{(dx^2 + dy^2)} &= \sqrt{(n^2y^{2n-2}dy^2 + dy^2)} = \\ dy \sqrt{(n^2y^{2n-2} + 1)}. \end{aligned}$$

Zieheth nun aus $(1 + n^2y^{2n-2})$ die Wurzel (§. 95 P. I.), und sethet, der Kürze halber, $2n-2=r$, so ist in dem Newtonischen Lehrsatze $m=1$, $n=2$, $P=1$, $Q=n^2y^r$.

$$p^{m:n} = 1 = A,$$

$$\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} n^2 y^r = B.$$

$$m-n$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} n^2 y^r \cdot \frac{1}{8} n^2 y^r = -n^4 y^{2r} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{1}{6} \cdot -\frac{1}{8} n^4 y^{2r} \cdot n^2 y^r = +\frac{1}{16} n^6 y^{3r} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} n^6 y^{3r} \cdot n^2 y^r = -\frac{5}{128} n^8 y^{4r} = E \text{ \&c.}$$

Demnach ist $dy \sqrt{(1 + n^2 y^{2n} - 2)} = dy$
 $+ \frac{1}{2} n^2 y^r dy - \frac{1}{8} n^4 y^{2r} dy + \frac{1}{16} n^6 y^{3r} dy - \frac{5}{128} n^8 y^{4r} dy$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $y + \frac{n^2 y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4 y^{2r+1}}{8(2r+1)} + \frac{n^6 y^{3r+1}}{16(3r+1)} -$

$\frac{5n^8 y^{4r+1}}{128(4r+1)}$ u. s. w. unendlich fort, die Läng-
 ge unendlicher Parabeln ausdrückt. Wol-

let ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle setzen, so bekommt ihr $y + \frac{n^2 y^{2n-1}}{2(2n-1)} -$

$$\frac{n^4 y^{4n-3}}{8(4n-3)} + \frac{n^6 y^{6n-5}}{16(6n-5)} - \frac{5n^8 y^{8n-7}}{128(8n-7)} \text{ \&c.}$$

Es sey z. B. $n=2$, so bekommt ihr $y + \frac{4y^3}{3 \cdot 2} - \frac{16y^5}{8 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 16y^7}{16 \cdot 7}$, &c. Das ist, $y + \frac{2y^3}{3}$

$$- \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{7} \text{ \&c. für die Apollonische Pa-}$$

rabel,

rabel, welche Reihe mit der oben gefundenen übereinkommt, wenn ihr $a = 1$ setzt.

Die 21. Aufgabe.

133. Aus dem gegebenen Tangente eines Circul-Bogens den Bogen zu finden.

Auflösung.

Tab. IX.
Fig. 76.

Es sey der Tangens $KB = x$, $BC = 1$, so ist $SK = dx$, $KC = \sqrt{1 + xx}$, $SL = xdx : \sqrt{1 + xx}$, wenn nemlich KC und SC einander unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winkel sind (§. 48), und $BKC = KSL$, weil KCL unendlich klein ist (§. 101 Geom.); so ist $KC : BC = SK : KL$ (§. 103 Geom.), das ist:

$$\sqrt{1 + x^2} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ferner $KC : KL = NC : Nn$ (§. 103 Geom.)

$$\frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} : dx = 1 : \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Wenn ihr nun dx durch $1 + x^2$ wirklich dividiret, so bekommet ihr für das Element Nn des Bogens BN , $dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10} dx$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort den

den Bogen BN exprimiret, dessen Tangens $BK = x$.

Der 1. Zusatz.

134. Der Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich, und also wird $x = 1$, folglich der Bogen von 45° oder der halbe Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \&c.$ Setzt ihr aber den ganzen Diameter ein, so ist der Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \&c.$

Der 2. Zusatz.

135. Derwegen verhält sich das Quadrat des Diameter zu der Circul-Fläche, wie der Diameter zu dem Quadranten von der Peripherie (§. 104).

Anmerkung.

136. Ihr hättet auf eben diese Art den Circul quadriren können (§. 104).

Die 22. Aufgabe.

137. Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls, welcher kleiner ist als ein Quadrant, den Tangentem zu finden.

Auflösung.

Wenn der Tangens x ist, so ist der Bogen $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \&c.$ (§. 133).

Setzt $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \&c.$ weil nun

$$-v + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \&c. = 0, \text{ und } x^3 =$$

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ \&c.} \\ x^5 &= \quad + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ \&c.} \\ x^7 &= \quad + \quad + a^7v^7 \text{ \&c.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (\S. 91, \\ \text{P. I.}). \end{array}$$

so ist

$$\begin{aligned} -v &= -v \\ x &= av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.} \\ -\frac{1}{3}x^3 &= -\frac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.} \\ &\quad - a^2cv^7 \text{ \&c.} \\ +\frac{1}{5}x^5 &= \quad + \frac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ \&c.} \\ -\frac{1}{7}x^7 &= \quad - \frac{1}{7}a^7v^7 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

demnach

$$\begin{array}{rcl} \frac{a-1=0}{a=1} & \frac{b-\frac{1}{3}=0}{b=\frac{1}{3}} & \frac{c-a^2b+\frac{1}{5}a^5=0}{c=b-\frac{1}{5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} \\ & & = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} \\ \frac{d-ab^2-a^2c+a^4b-\frac{1}{7}a^7=0}{d=b^2+c+\frac{1}{7}-b=\frac{1}{9}+\frac{2}{15}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}} & & \\ = \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{126+135-210}{945} = \frac{51}{945} & & \\ = \frac{17}{315}. & & \end{array}$$

Setzt nun diese gefundenen Werthe für a ,
 b , c , d , &c. in die angenommene Reihe für
den

Den Tangentem; so bekommt ihr $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2v^5}{15} + \frac{17v^7}{315} \&c.$

Die 23. Aufgabe.

138. Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens den Bogen, welcher kleiner als ein Quadrant ist, zu finden.

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r , der Sinus des Bogens, oder die Semiordinate y , der Sinus versus oder die Abscisse x ist; so ist die Aequation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

$$\text{Daher } 2r dx - 2x dx = 2y dy$$

$$dx = y dy : (r - x)$$

$$dx^2 = y^2 dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$$

$$\text{Das ist, } = y^2 dy^2 : (r^2 - y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(y^2 dy^2 + r^2 dy^2 - y^2 dy^2)} : \sqrt{(r^2 - y^2)} = r dy : \sqrt{(r^2 - y^2)}.$$

Damit dieses Element des Bogens zu dem Integriren geschickt werde, so ziehet aus $1 : (r^2 - y^2)$ die Wurzel in der That (§. 95 P. I.). Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = r^2$, $Q = -y^2 : r^2$.

(Wolfs Mathef. Tom. IV.) Ecc ecc P^{m:n}

$$P^{m:n} = r^{-1} = 1 : r = A.$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{y^2}{r^2} = \mp \frac{y^2}{2r^3} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{2r^3} - \frac{y^2}{r^2} = \mp \frac{3y^4}{8r^3} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{3y^4}{8r^3} - \frac{y^2}{r^2} = \mp \frac{5y^6}{16r^7} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{5y^6}{16r^7} - \frac{y^2}{r^2} = \mp \frac{35y^8}{128r^9} = E.$$

u. s. w. unendlich fort.

$$\text{Also ist } rdy(r^2 - y^2)^{-1/2} = dy \mp \frac{y^2 dy}{2r^2} \mp \frac{3y^4 dy}{8r^4}$$

$$\mp \frac{5y^6 dy}{16r^6} \mp \frac{35y^8 dy}{128r^8} \&c. \text{ dessen Integrale } y \mp$$

$$\frac{y^3}{6r^2} \mp \frac{3y^5}{40r^4} \mp \frac{5y^7}{112r^6} \mp \frac{35y^9}{1152r^8} \&c. \text{ den ver-}$$

langten Bogen durch seinen Sinum aus-
druckt. Wenn ihr besser sehen wollet, wie die
Reihe unendlich fortgeht, so nennet das erste
Glieder A, das andere B, das dritte C u. s. w.

$$\text{so findet ihr } y \mp \frac{1 \cdot 1 \cdot y^2 A}{2 \cdot 3r^2} \mp \frac{3 \cdot 3 \cdot y^2 B}{4 \cdot 5r^2}$$

$$\mp \frac{5 \cdot 5 \cdot y^2 C}{6 \cdot 7r^2} \mp \frac{7 \cdot 7 \cdot y^2 D}{8 \cdot 9r^2} \mp \frac{9 \cdot 9 \cdot y^2 E}{10 \cdot 11r^2} \&c.$$

Zu

Zusatz.

$$\begin{aligned}
 &139. \text{ Weil der Bogen } v = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} \\
 &+ \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} \text{ \&c. so findet ihr, wie in} \\
 &\text{der 22. Aufgabe (§. 137)} y = v - \frac{v^3}{6r^2} + \frac{v^5}{120r^4} \\
 &- \frac{v^7}{5040r^6} + \frac{v^9}{362880r^8} \text{ \&c.} = v - \frac{v^3}{1 \cdot 1.2.3r^2} \\
 &+ \frac{v^5}{1.2.3.4.5r^4} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7r^6} \\
 &+ \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9r^8} \text{ \&c.}
 \end{aligned}$$

das ist, wenn ihr das erste Glied A, das
andere B, das dritte C &c. sehet, $y =$
 $v - v^2A + v^2B - v^2C + v^2D \text{ \&c.}$

$$\frac{2.3r^2}{4.5r^2} \quad \frac{6.7r^2}{8.9r^2}$$

Die 24. Aufgabe.

140. Aus dem gegebenen Sinu verfo den
Bogen des Circuls zu finden.

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$,
die Abscisse oder der Sinus versu $= x$ ist,
so ist für den Circul

$$\text{Ecc ecc } 2 \quad 2rx$$

$$\begin{array}{l}
2rx - xx = yy \\
\hline
2r dx - 2x dx = 2y dy \\
\hline
(r dx - x dx) : y = dy \\
\hline
(r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : y^2 = dy^2 \\
\hline
\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + (r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx))} = \sqrt{((2r x dx^2 - x^2 dx^2 + r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx))} = \\
r dx : \sqrt{(2rx - xx)} = r dx (2rx - x^2)^{-1/2}, \\
\text{oder, wenn ihr } 2r = 1 \text{ sehet, } \frac{1}{2} dx (x - x^2)^{-1/2}. \\
\text{Damit dieses Element zu dem Integriren} \\
\text{geschickt werde, so ziehet aus } (x - x^2)^{-1} \text{ die} \\
\text{Wurzel in der That (§. 95 P. I.).} \\
\text{Es ist aber } m = -1, n = 2, P = x, \\
Q = -x, \text{ und demnach} \\
P^{m:n} = x^{-1:2} = A. \\
\frac{mAQ}{n} = -\frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot -x = \frac{1}{2} x^{1/2} = B. \\
\frac{m-nBQ}{2n} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{1/2}}{2 \cdot 2} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3 x^{3/2}}{2 \cdot 4} = C. \\
\frac{m-2nCQ}{3n} = -\frac{\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 3 x^{3/2}}{3 \cdot 2 \cdot 4} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^{5/2}}{2 \cdot 4 \cdot 6} = D. \\
\frac{m-3nDQ}{4n} = -\frac{\frac{7}{8} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 x^{5/2}}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 x^{7/2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \\
\&c.
\end{array}$$

Daher

$$\text{Daher ist } \frac{1}{2}dx: \sqrt{(x-xx)} = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx \mp \frac{1}{4}x^{1/2}dx \mp \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4}x^{3/2}dx \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6}x^{5/2}dx \mp$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^{7/2}dx \text{ \&c. und folglich der Bogen}$$

$$AP = x^{1/2} \mp \frac{1}{2 \cdot 3}x^{3/2} \mp \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^{5/2}$$

$$\mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^{7/2} \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^{9/2} \text{ \&c. oder}$$

$$\sqrt{x} \left(1 \mp \frac{1}{2 \cdot 3}x \mp \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^3 \mp \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^4 \text{ \&c.} \right)$$

Zusatz.

141. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrücken, so werdet ihr auf die Art, wie oben (§. 137) finden $x = \frac{v^2}{1.2}$

$$\frac{v^4}{1.2 \cdot 3 \cdot 4} \mp \frac{v^6}{1.2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \text{ \&c.} = \text{(wenn ihr das}$$

erste Glied A, das andere B u. s. w. sehet)

$$\frac{v^2}{1.2} - \frac{v^2 A}{3.4} \mp \frac{v^2 B}{5.6} - \frac{v^2 C}{7.8} \text{ \&c.}$$

$$\frac{v^2}{1.2} - \frac{v^2 A}{3.4} \mp \frac{v^2 B}{5.6} - \frac{v^2 C}{7.8} \text{ \&c.}$$

Ecc ecc 3

Von

Von der Cubatur der Körper.

Die 5. Erklärung.

142. Cubiren heißt den Inhalt eines Körpers finden.

Der 1. Zusatz.

143. Wenn ein Körper erzeugt wird, indem eine Figur sich um ihre Are herum bewegt, so beschreibt jede Semiordinate einen Circul, und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul, der mit der Semiordinate beschrieben wird, in die Differentiale der Abscisse. Wenn ihr demnach die Verhältniß des Radii zu der Peripherie sehet $r:p$, so ist die Peripherie des gedachten Circuls $py:r$ und der Inhalt $py^2:2r$ (S. 162 Geom.), folglich das Element $py^2 dx:2r$.

Der 2. Zusatz.

144. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Gleichung für die gegebene Figur sehet und das Element integriret; so habt ihr den verlangten Inhalt des Körpers.

Die 25. Aufgabe.

145. Den Conum zucubiren.

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (S. 35 Geom.), so habt ihr
(wenn

(wenn die Höhe des Triangels a , die Grundlinie r ist)

$$\begin{array}{r} rx = ay \\ \hline r^2 x^2 : a^2 = y^2 \\ \hline py^2 dx : 2r = prx^2 dx : 2a^2 \\ \hline \int py^2 dx : 2r = prx^3 : 6a^2. \end{array}$$

Wenn ihr den ganzen Kegel verlanget, so setzet a für x , und ihr findet seinen Inhalt $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}pra = \frac{1}{2}pr \cdot \frac{1}{3}a$, das ist, wenn ihr die Grundfläche $\frac{1}{2}pr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3}a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

146. Die Kugel zueubiren.

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (S. 27 Geom.), in welchem (S. 198 P. I.).

$$\begin{array}{r} 2rx - xx = yy \\ \hline \text{daher ist } py^2 dx : 2r = pxdx - px^2 dx : 2r \\ \hline \int py^2 dx : 2r = \frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r. \end{array}$$

Wenn ihr die ganze Kugel verlanget, so setzet $2r$ oder den Diameter für x oder die

Höhe des Kugel-Stücks, und ihr bekommet für ihren Inhalt $2pr^2 - 8pr^2:6 = 4pr^2:6 = \frac{2}{3}pr^2$.

Zusatz.

147. Der Inhalt eines umschriebenen Cylinders, dessen Höhe nemlich dem Diameter, die Grund-Fläche dem größten Circul der Kugel gleichet, ist pr^2 , und demnach verhält er sich zur Kugel wie pr^2 zu $\frac{2}{3}pr^2$, das ist, wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

148. Einen parabolischen Apter-Kegel zucubiren.

Auflösung.

In der Parabel ist

$$y^2 = ax$$

$$\text{Daher } py^2 dx : 2r = apx dx : 2r$$

$$\int py^2 dx : 2r = \int apx dx : 4r = \int py^2 x : 4r.$$

Wenn die Höhe des ganzen Kegels h und der halbe Diameter in der Grund-Fläche r ist; so ist der Inhalt desselben $bpr^2:4r = \frac{1}{4}bpr$.

Zusatz.

149. Da nun der umschriebene Cylinder $\frac{1}{2}bpr$ ist, so verhält sich dieser zu dem parabolischen Apter-Kegel wie $\frac{1}{2}bpr$ zu $\frac{1}{4}bpr$, das ist, wie 2 zu 1.

Die

Die 28. Aufgabe.

150. Unendliche parabolische Aſter,
Regel auf einmal zucubiren.

Auſlösung.

Es ſey der Parameter = 1, ſo iſt für
unendliche Parabeln

$$\begin{array}{r} y^m = x \\ \hline y = x^{1:m} \\ \hline y = x^{2:m} \\ \hline py^2 dx : 2r = px^{2:m} dx : 2r \\ \hline \int py^2 dx : 2r = mpx^{2+m:m} : (4 + 2m)r = mpxy^2 : \\ (2m + 4)r. \end{array}$$

Die 29. Aufgabe.

151. Eine elliptiſche Aſter-Kugel zu-
cubiren.

Auſlösung.

Es ſey der kleine Diameter in der Ellipſi
2r, der groſſe = 2a, ſo iſt

$$\begin{array}{r} yy = rr - r^2 x^2 : a^2 \text{ (ſ. 253 P. I.)} \\ \hline py^2 dx : 2r = \frac{1}{2} pr dx - prx^2 dx : 2a^2 \\ \hline \int py^2 dx : 2r = \frac{1}{2} prx - prx^3 : 6a^2. \end{array}$$

Setzet für x die ganze große Ase $2a$, so kommt der Inhalt des ganzen Körpers apr — $\frac{2}{3}apr = \frac{4}{3}apr = \frac{2}{3}apr$.

Der 1. Zusatz.

152. Der umschriebene Cylinder ist apr (S. 221 Geom.), und demnach verhält er sich zu der elliptischen Aster-Kugel wie apr zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie 1 zu $\frac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der 2. Zusatz.

153. Die Kugel, deren Diameter dem großen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3p : 3r$ (S. 147). Demnach verhält sie sich zu der elliptischen Aster-Kugel wie $2a^3p : 3r$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie a^2 zu r^2 , oder wie das Quadrat der großen Ase zu dem Quadrate der kleinen.

Der 3. Zusatz.

154. Die Kugel, deren Diameter dem kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3}pr^2$ (S. 147). Derowegen verhält sie sich zu der elliptischen Aster-Kugel wie $\frac{2}{3}pr$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie r zu a , oder die kleine Ase zu der großen.

Die 30. Aufgabe.

155. Einen hyperbolischen Aster-Begel zucubiren.

Auf:

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $= 2a$, die kleine Axe $= 2r$, die Abscisse $= x$, die Semior-
dinate $= y$, so ist (§. 269 P. I.)

$$\begin{aligned} rr:aa &= y^2:2ax \mp xx \\ y^2 &= (2ar^2x \mp r^2x^2):a^2 \\ py^2dx:2r &= prxdx:a \mp prx^2dx:2a^2 \\ \int py^2dx:2r &= prx^2:2a \mp prx^3:6a^2. \end{aligned}$$

Setzet für x die ganze Höhe des Asters-
Regels b , so kommt sein Inhalt $prb^2:2a \mp$
 $prb^3:6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

156. Den Inhalt des Körpers zuseh Tab. IX.
den, welcher erzeugt wird, indem der Fig. 81.
Raum zwischen der logarithmischen Li-
nie MI und der geraden Linie PH sich um
PH herum bewegt.

Auflösung.

In der logarithmischen Linie, deren Sub-
tangens $= a$, ist

$$\begin{aligned} ydx &= ady \quad (\S. 112) \\ dx &= ady:y \\ py^2dx:2r &= apy^2dy:2ry = apydy:2r \\ \int py^2dx:2r &= apy^2:4r. \end{aligned}$$

Neh

Nehmet r für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des ganzen Körpers $\frac{1}{2}apr$, welcher durch die Bewegung des unendlichen Raums IBAH beschrieben wird.

Die 32. Aufgabe.

157. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher beschrieben wird, indem sich eine halbe Parabel ANS um ihre Semiordinate bewegt.

Auflösung.

Tab. IX.
Fig. 75.

In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul, welcher mit MT der Differenz zwischen der Abscisse AP und AS beschrieben wird, in die Differentiale der Semiordinate. Setzet nun $AS=r$, $NS=b$, $AP=x$, so ist $PS=MF=r-x$. Wenn nun die Verhältniß des Radii zur Peripherie $r:p$, so findet ihr die Peripherie, welche mit MF beschrieben worden ist, $(rp - px):r$, folglich den Circul $(r^2p - 2rpx + px^2):2r$. Dannenhero ist das Element $(r^2pdy - 2rpxdy + px^2dy):2r$. Nun ist in der Parabel, wenn der Parameter $=1$, $y^2=x$ (§. 217 P. I.) und $y^4=x^2$. Daher das Element $\frac{1}{2}rpd y - py^3dy + py^4dy:2r$, dessen Integrale $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}py^3 + py^4:10r$ das Stück des Körpers exprimirt, welches von MNF beschrieben worden ist.

Wenn

Wenn ihr für y^2 seinen Werth x sehet, so habt ihr für eben dasselbe Stück $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r$. Sehet nun ferner r für x und b für y ; so bekommt ihr für den ganzen Körper $\frac{1}{2}rpb - \frac{1}{3}prb + pr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10})bpr = \frac{(30 - 20 + 6)}{30}bpr = \frac{16}{30}bpr$.

60

Anmerkung.

158. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der Körper finden, wenn ihr sehet, daß sich eine Fläche um eine andere Linie, als z. E. um den Tangentem oder die subnormal-Linie bewegt.

Von der verkehrten Methode der Tangentium.

Die 9. Erklärung.

159. Die verkehrte Methode der TANGENTIUM (Methodus Tangentium inversa) ist diejenige, welche zeigt, wie man aus dem gegebenen Subtangente, Tangente, der normal-Linie oder subnormal-Linie zc. die Gleichung finden kan, welche die Natur der Linie erklärt.

Zusatz.

160. Sehet nemlich die gegebenen Linien ihrem Werthe gleich, worinnen die differential-Größen anzutreffen sind, so bekommt ihr die differential-Gleichung für die gesuchte Linie. Wenn ihr nun selbige integri-

tegrirt, so bekommet ihr die gesuchte Gleichung.

Die 33. Aufgabe.

161. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens $= 2yy:a$.

Auflösung.

Weil der Subtangens in einer jeden algebraischen Linie $= ydx:dy$, so ist

$$\begin{array}{r} 2y^2:a = ydx:dy \\ \hline 2y^2dy = aydx \\ \hline = y \\ \hline 2ydy = adx \\ \hline y^2 = ax. \end{array}$$

Welche Gleichung zeigt, daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerkung.

162. Hätte man gesagt, daß der Subtangens sollte $2x$ seyn, (ich setze aber beständig, wie vorhin, daß x allezeit die Abscisse, y die Semitordinate bedeute); so bekämet ihr $ydx = 2xdy$. Wollet ihr nun diese Gleichung zu dem Integriren geschickt machen, so sehet ihr, daß, wenn ihr x durch y exprimiren wollet, ihr y^2 durch eine beständige Grösse dividiren müßet, und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2:a$.

Die 34. Aufgabe.

163. Eine krumme Linie zu finden, deren subnormal-Linie beständig von einer Grösse ist. $\text{S. L.} = a$.

Auf:

Auflösung.

Die subnormal-Linie ist $ydy:dx$ (§. 46).
Dennach

$$\begin{array}{r} ydy:dx=a \\ \hline ydy=adx \\ \hline \frac{1}{2}y^2=ax \\ \hline y^2=2ax. \\ \hline \end{array}$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel,
deren Parameter der doppelten subnormal-
Linie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

164. Eine krumme Linie zu finden, des-
ren Subtangens die mittlere proportional-
Linie ist zwischen x und y .

Auflösung.

$$\begin{array}{r} \text{Es ist } ydx:dy=\sqrt{xy} \\ \hline ydx=dy\sqrt{xy}=x^{1:2}y^{1:2}dy \\ \hline dx=y^{-1:2}x^{1:2}dy \\ \hline x^{-1:2}dx=y^{-1:2}dy \\ \hline 2x^{1:2}=2y^{1:2} \\ \hline \end{array}$$

\sqrt{x}

$$\frac{\sqrt{x} = \sqrt{y}}{x = y.}$$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschenkeliger rechtwinkliger Triangel. Ihr könnt aber auch sehen

$$\begin{array}{r} \sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y} \\ \text{so ist } x + 2\sqrt{ax} + a = y \\ \hline 2\sqrt{ax} = y - x - a \\ \hline 4ax = y^2 - 2yx + xx + 2ax - 2ay + aa \\ \hline y^2 - 2yx + x^2 - 2ax - 2ay + aa = 0. \end{array}$$

Welches eine Gleichung an dem Circul ist, worinnen der Ursprung von x und y auf besondere Weise (§. 362 P. I.) zu determiniren ist.

Ihr könnt auch sehen, daß $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{y}$.

Die 36. Aufgabe.

165. Eine krumme Linie zu finden, deren subnormal-Linie $= r - x$.

Auflösung.

$$\begin{array}{r} \text{Es ist } ydy : dx = r - x, \\ \hline ydy = rdx - xdx \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\frac{1}{2}y^2 = rx - \frac{1}{2}x^2}{y^2 = 2rx - xx.}$$

Also ist die verlangte Linie ein Circul, dessen Diameter = $2r$.

Die 37. Aufgabe.

166. Eine Linie zu finden, deren subnormal, Linie = \sqrt{ax} .

Auflösung.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ydy:dx &= \sqrt{ax} = a^{1/2}x^{1/2} \\ \frac{ydy}{a^{1/2}x^{1/2}} &= dx \\ \frac{\frac{1}{2}y^2}{\frac{2}{3}\sqrt{ax^3}} &= x \\ y^2 - \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} &= \frac{2}{3}\sqrt{4ax^3}. \end{aligned}$$

Also ist das Quadrat der Semiordinate in dieser Linie jederzeit einem parabolischen Raume gleich (§. 91), und also die quadratrix parabolæ, weil durch ihre Semiordinaten die Parabel quadrit wird, deren Parameter $4a$.

Die 38. Aufgabe.

167. Eine krumme Linie zu construiren, deren Subtangens einer unveränderlichen Linie gleich ist.

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Ddd ddd Auf:

Auflösung.

Es ist

$$\begin{aligned} ydx:dy &= a \\ \hline dx &= ay^{-1}dy \\ \int dx &= \int ay^{-1}dy. \end{aligned}$$

Wenn ihr $ay^{-1}dy$ (§. 82) integrieren woltet, so käme heraus $ay^0:0 = a:0$, das ist, eine unendliche große Grösse. Und also geht die Integration algebraisch nicht an. Da nun aber bekannt ist (§. 61), daß die angenommene Eigenschaft der logarithmischen Linie zugehört, in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§. 307 P. I.); so muß auch $\int ay^{-1}dy (=x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn, und dannhero könnet ihr jederzeit für die Integrale von $ay^{-1}dy$ oder $ady:y$ den Logarithmus von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer logarithmischen Linie genommen werden, deren Subtangens a ist.

Der 1. Zusatz.

168. Da nun die Differentiale eines Logarithmi $= ady:y$, so könnet ihr jetzt auch diejenigen Grössen differentiiren, in welchen Logarithmi zu finden sind. Es sey z. E. ly^n , so ist die Differentiale $nly^{n-1}ady:y$.

Der 2. Zusatz.

169. Es sey die Differentiale eines Logarithmi $= dy:(1+y)$; so ist der Logarithmus
der

der Zahl $1 + y = fdy : (1 + y)$. Nun ist $1 : (1 + y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ u. s. w. wie ihr es findet, wenn ihr in der That dividiret, und daher $dy : (1 + y) = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ &c. Derowegen ist $fdy : (1 + y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1 + y = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

170. Weil nun $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 137) $y = l +$

$$\frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5} \text{ \&c.}$$

Der 4. Zusatz.

171. Ihr sehet zugleich (§. 168), wie die Differentiale der logarithmischen Grössen integrirt werden, wenn man a für den Subtangente der logarithmischen Linie annimmt. Es ist $\int f ly^n dy : y = ly^{n+1} : n(+1)a$, $\int ly dy \sqrt{aa + ly^2} : ay = (aa + ly^2)^{3/2} : 3a$ u. s. w.

Anmerkung.

172. Wenn man die differential-Gleichung nicht integriren kann, so sucht man dieselbe auf die Quadratur oder Rectification des Circuls, oder Parabel, Hyperbel und Ellipsis zureduciren, weil diese Linien bekannt sind, und ist zufrieden, wenn man sagen kann, daß die Construction der verlangten Linie von der Quadratur oder Rectification einer von den gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habt

Qdd,ddd a

such

euch aber zu dem Ende alle Elemente der Flächen und Längen in den Regel-Schnitten bekannt zu machen, damit ihr um so viel leichter wahrnehmet, auf was für eine Quadratur oder Rectification sich jeder vorkommender Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

173. Eine krumme Linie zuonstruiren, in welcher $dz = qdu$.

Auflösung.

Es bedeutet q eine Grösse, welche aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruchs zusammen gesetzt ist. Beschreibt in unendlichen Fällen, welche unter der gegebenen Gleichung begriffen sind, eine krumme Linie, deren Abscissen $= v$, die Semiordinaten $= aq$ sind; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret, so bekommet ihr qdu . Derowegen richtet auf eben der Ase für die Abscissen u andere Semiordinaten auf, welche $= sqdu$, das ist, dem Raume gleich sind, welcher zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten sind, wenn man ihn durch eine unveränderliche Grösse a dividiret, so bekommet ihr die Linie, deren differential-Gleichung $dz = qdu$.

Der I. Zusatz.

174. Es sey $ydx = ady$, oder $dx = ady : y$, so sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependirt, $aa : y$. Da nun die Gleichung einer
gleich-

gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist (§. 283 P. I.) $aa = zy$: so erkennet ihr daraus die Art der Linie.

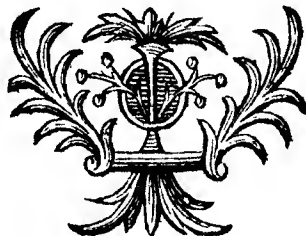
Der 2. Zusatz.

175. Wenn in der verlangten Linie der Tab. VI. Subtangens $= y\sqrt{(aa + yy)} : a$, so ist $dx =$ Fig. 53.
 $= dy\sqrt{(aa + yy)} : a$. Also sind die Semioordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependirt, $\sqrt{(aa + yy)}$.
 Woraus ihr abermal erkennet, daß es eine gleichseitige Hyperbel sey, denn es sey $AC = CB = a$, $CQ = PM = y$, $QM = CP = x$; so ist $AP = x - a$, $BP = a + x$, folglich $AP \cdot PB = x^2 - a^2$, und $y^2 = x^2 - a^2$ (§. 290 P. I.),
 und daher $x = \sqrt{(y^2 + a^2)}$
 $= QM$.

END

des

dritten Theils.



Ddd ddd 3

Der

Der vierte Theil,
 von den
 Anfangs - Gründen
 der
Exponential-
 und
Differentio = Differential-
 Rechnung.

Die I. Erklärung.

176. **D**ie exponential-Rechnung besteht in dem Differentiiren und Integriren solcher Größen, welche einen veränderlichen Exponenten haben, als x^x , a^x , und exponential-Größen genennet werden.

Die I. Aufgabe.

177. Eine exponential-Größe zudifferentiiren.

Auflösung.

Die ganze Kunst kommt darauf an, daß man die exponential-Größen auf logarithmische reducirt, und sie (§. 168) differentiirt. Setzet nemlich

$$x^y = z$$

$$xy = z$$

so ist $y/x = z$

$$lxdy + ydx : x = dz : z \quad (\S. 168)$$

$$z(lxdy + ydx : x) = dz$$

das ist, $xy(lxdy + ydx : x) = dz$,

$$\text{oder } xy lxdy + yx^{y-1}dx = dz.$$

Sehet abermal:

$$\frac{y}{v^x} = z$$

so ist $xy/v = z$

$$(xy lxdy + yx^{y-1}dx) / v + xy dv : v = dz : z$$

$$x(xy lxdy + yx^{y-1}dx) / v + zxy dv : v = dz$$

$$\frac{y}{v^x} xy lxdy + \frac{y}{v^x} yx^{y-1} v dx + \frac{y}{v^x} xy dv = dz.$$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in andern Fällen.

Die 2. Erklärung.

178. Eine exponential-Linie wird genennet eine krumme Linie, welche durch eine exponential-Gleichung erklärt wird, als wenn $x^x = y$.

Zusatz.

179. Wenn ihr die exponential-Gleichung differentiiret (§. 177), und den Werth von dx in dem differential-Werthe des Subtangents und der subnormal-Linie substituirt; so findet ihr, wie in den algebraischen Linien, ihren Subtangens und ihre subnormal-Linie. Es sey z. E.

$$\begin{array}{r} x^x = y, \text{ so ist} \\ \hline y^x dx + y dx = dy \\ \hline dx = dy : (y^x + y) \\ \hline y dx : dy = y dy : (y^x + y) dy = 1 : (1 + lx). \end{array}$$

Für die subnormal-Linie ist

$$y dy : dx = (y^x dx + y^2 dx) : dx = y^x + y^2 = y^x (lx + 1).$$

Die 2. Aufgabe.

180. Die Differentiale einer logarithmischen Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollt z. E. $x^x dx$ integriren. Set

$$x = 1$$

$$\begin{array}{l} x = 1 + y \\ \hline \text{so ist } lx = l(1 + y) \\ \hline dx = dy \\ \hline x l x dx = l(1 + y)(1 + y) dy. \end{array}$$

Nun ist $l(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.$ Derwegen $l(1 + y)(1 + y)dy = (1 + y)dy(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.) =$ (wenn man in der That multiplicirt).

$$\begin{array}{l} ydy - \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1}{3}y^3dy - \frac{1}{4}y^4dy + \frac{1}{5}y^5dy \&c. \\ + y^2dy - \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy - \frac{1}{4}y^5dy \&c. \\ \hline \text{das ist, } ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy \&c. \end{array}$$

folglich die verlangte Integrale $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6 \&c. = \frac{1y^2}{1.2} +$

$$\frac{1y^3}{1.2.3} - \frac{1y^4}{2.3.4} + \frac{1y^5}{3.4.5} - \frac{1y^6}{4.5.6} \&c.$$

in welcher Reihe $y = x - 1$.

Auf gleiche Manier könnet ihr in andern Fällen verfahren.

Qdd ddd 5

Die

Die 3. Aufgabe.

181. Eine exponential-Größe zu integrieren.

Auflösung.

Ihr sollt z. E. $(1+y)^{1+y} dy$ integrieren.
 Setzt:

$$(1+y)^{1+y} = 1+v$$

$$\text{so ist } (1+y)/(1+y) = 1/(1+v)$$

folglich (§. 169)

$$y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 - \frac{1}{240}y^5 \&c. = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 \&c.$$

Setzt ferner:

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \&c.$$

$$\text{so ist } v^2 = y^2 + 2ky^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 \&c. \\ + 2my^4 + 2ny^5 \&c.$$

$$v^3 = y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 \&c. \\ + 3my^5$$

$$v^4 = y^4 + 4ky^5 \&c.$$

$$v^5 = y^5 \&c.$$

(§. 9 I P. I.).

Daher

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \&c.$$

$$-\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}y^2 - ky^3 - \frac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5 \&c. \\ - my^4 - ny^5$$

$$+ \frac{1}{3}v^3 = + \frac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5 \&c. \\ + my^5$$

$$-\frac{1}{4}v^4 = -\frac{1}{4}y^4 - ky^5 \&c.$$

$$-\frac{1}{5}v^5 = + \frac{1}{5}y^5 \&c.$$

$$-y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{240}y^5 \&c. = 0.$$

Man

Man bekommt demnach

$$\begin{array}{rcl} 1 - 1 = 0 & k - 1 = 0 & m - k + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0 \\ \hline 1 = 1 & k = 1 & m = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} n - \frac{1}{2}k^2 - m + k - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0 & & \\ \hline n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0 & & \\ \hline n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p - km - n + k^2 + m - k + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0 & & \\ \hline p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{20} & & \\ \hline p = \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \end{array}$$

Demnach ist $(1 + y)^{1/2} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ &c. folglich $(1 + y)^{1/2} dy = dy + y dy + y^2 dy + \frac{1}{2}y^3 dy + \frac{1}{3}y^4 dy + \frac{1}{12}y^5 dy$ &c. Und daher $\int (1 + y)^{1/2} dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6$ &c.

Zusatz.

182. Wenn ihr die Differentiale einer exponential-Größe integrieren können, so können ihr auch die exponential-Linien quadrieren.

Die

Die 3. Erklärung.

183. Differentio = differentiiren heißt so viel, als die Differentiale von einer differential-Größe finden.

Zusatz.

184. Wenn die Differentiale dx ist, so nennet ihre Differentiale, oder die differentio-Differentiale von x , ddx ; die differentiale von ddx aber $dddx$ u. s. w.

Die 4. Aufgabe.

185. Eine jede gegebene differential-Größe von neuem zudifferentiiren.

Auflösung.

Es geschieht nach den Regeln (§. 13 & seqq.), nach welchen die veränderlichen Größen differentiirt werden, nur, daß man eine differential-Größe meistens als eine unveränderliche annimmt, und daher auch die andere Differentiale für nichts hält (§. 4).

Z. E. Die andere Differentiale von $x dx$ findet ihr $dx^2 + x ddx$ (§. 16); $d(1 : dx) = -ddx : dx^2$ (§. 24); $d(y dy : dx) = (dy^2 + y ddy) : dx$, wenn ihr dx unveränderlich annehmet, hingegen $= (dy^2 dx - y dy ddx) : dx^2 = dy^2 :$

$dy^2:dx - ydyddx:dx^2$ (§. 24), wenn ihr dy unveränderlich annehmet; $d\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dyddy:\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ wenn dx unveränderlich ist; hingegen $dxddx:\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, wenn dy unveränderlich ist (§. 20) u. s. w.

Anmerkung.

186. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle applicirt wird, so ist nicht schwer zusehen, welche Differentiale ihr für unveränderlich annehmen könnet.

Die 4. Erklärung.

187. Wenn eine krumme Linie AFK Tab. X. anfangs die hohle, hernach die erhabene Seite gegen die Axe AE kehret, und immer in einem mit der Axe fortgeht, so heist der Punct F, wo die Wendung geschieht, der Wendungs-Punct; hingegen der Wiederkehr-Punct, wenn sie wieder zurück gegen die Axe kehrt. In dem Lateinischen nennet man diese Punkte Puncta flexus contrarii. Fig. 86.

Der 1. Zusatz.

188. Wenn die krumme Linie einen Wendungs-Punct hat, so ist klar, daß die Linie AT zunimt mit der Abscisse AP, bis diese in E kommt, denn so bald sich die Linie wendet, so nimt die Linie AT wieder ab, und die Abscisse nimt, wie vorhin, zu.
Des

Derwegen könnet ihr AL als die größte Linie von ihrer Art ansehen.

Der 2. Zusatz.

189. Hingegen, wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungs-Punct hat, so wächst anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse bis in L: nach diesem, wenn die Linie sich wendet, so nimt die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurück und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AE die größte von ihrer Art werden.

Der 3. Zusatz.

Tab. X.
Fig. 86.

190. Da nun $AL = (ydx : dy) - x$ (§. 35), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet (§. 185),

$$\begin{array}{r} (dy^2 dx - y dx ddy) : dy^2 - dx = 0 \\ \hline dy^2 dx - y dx ddy - dy^2 dx = 0 \\ \hline -y ddy = 0 \\ \hline \quad \quad \quad y \\ ddy = 0, \text{ oder } ddy = \infty \text{ (§. 64).} \end{array}$$

Der 4. Zusatz.

Tab. X.
Fig. 87, 88.

191. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Punkte B gezogen sind; so ziehet Bm und BM unendlich nahe, und Bc auf Bm perpendicular: dann ist klar, daß an der hohlen

hohlen Seite Bt grösser ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Dero-
wegen ist in dem Wendungs-Puncte $rO = 0$.
Beschreibet nun aus dem Mittel-Puncte B
den Bogen TH und MR, so sind die Trian-
gel mMR, MBT und THO einander ähn-
lich (§. 183 Geom.), weil nemlich bey R, H
(§. 48) und B rechte Winkel sind, und über
dieses $HOT = MTB$, und $MmR = MTB$, in-
dem beyde von MTB nur um einen unend-
lichen kleinen Winkel HBT und MBm un-
terschieden sind (§. 101 Geom.), und die Aus-
schnitte des Circuls sind, weil die Winkel
MBm und HBT mit HBM einen rechten
Winkel machen, auch einander ähnlich.
Demnach ist (§. 183 Geom.)

$$\begin{aligned} mR:MR &= BM:BT \\ \frac{dy}{dx} : \frac{y}{dx} &= \frac{y}{dy} : \frac{ydx}{dy} \\ BM:BT &= MR:TH \\ y : ydx &= dx : \frac{dx^2}{dy} \\ BM:BT &= TH:HO; \\ \text{daher } MR:TH &= TH:HO \\ dx : \frac{dx^2}{dy} &= \frac{dx^2}{dy} : \frac{dx^3}{dy^2} \end{aligned}$$

Also ist die Differentiale von BT oder tH,
wenn ihr dx für unveränderlich annehmet,
 $= (dx dy^2 - y dx ddy) : dy^2$ (§. 185), dannen-
hero $OH \pm tH = Ot = (dx^2 \pm dx dy^2 - y dx ddy) : dy^2$.

: dy^2 . Da nun die Linie EO in dem Wendungs-Puncte nichts wird, so ist

$$\frac{(dx \mp dx dy^2 - y dx ddy) : dy^2 = 0}{dx^2 \mp dy^2 - y ddy = 0, \text{ oder } = \infty.}$$

Die 5. Aufgabe.

192. Den Wendungs-Punct in einer Linie zu finden, wo die Semiordinaten mit einander parallel sind.

Auflösung.

Tab. X.
Fig. 86.

Weil in diesem Falle $ddy = 0$, so suchet diesen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie durch x , und ihr werdet daraus den Werth von AE , das ist, der Abscisse finden, welcher die aus dem Wendungs-Puncte F gezogene Semiordinate EF , zugehört.

Der 1. Zusatz.

$$\begin{aligned} 193. \text{ Es sey } \frac{axx = xxy \mp aay}{ax^2} \\ \frac{\quad}{x^2 \mp a^2} = y \\ \frac{2a^3 x dx}{(x^2 \mp a^2)^2} = dy \end{aligned}$$

Wenn

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

$$(2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^2x^4dx^2 + 8a^5x^2dx^2) : (x^2+a^2)^4 = ddy = 0.$$

Und wenn ihr mit $(xx+aa)dx^2:(x^2+a^2)^4$ dividiret,

$$\begin{array}{l} 2a^3x^2 + 2a^5 - 8a^3x^2 = 0 \\ \text{das ist } 2a^5 - 6a^3x^2 = 0 \\ \hline \text{folglich } a^2 - 3x^2 = 0 \\ \hline \text{und } \sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x. \end{array}$$

Setzt ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Gleichung;

$$\begin{array}{l} \text{so ist } y = axx : (xx + aa) \\ \hline y = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{1}{3}aa + aa) = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{4}{3}aa) \\ \hline = a^3 : 4aa = \frac{1}{4}a. \end{array}$$

Solchergestalt könnet ihr den Wendungspunct finden, auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist.

Der 2. Zusatz.

194. Es sey

$$y - a = (x - a)^{\frac{2}{5}}$$

$$\text{so ist } dy = \frac{2}{5}(x - a)^{-\frac{3}{5}}dx$$

$$ddy = -\frac{6}{25}(x - a)^{-\frac{8}{5}}dx^2 = 0.$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) E e e e e Wenn

Wenn nemlich dx unveränderlich angenommen wird: folglich

$$\frac{-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5} = 0}{-6 = 0.}$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, so
setzet

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = \infty$$

$$\text{das ist } \frac{-6dx^2 : 25\sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty}{}$$

$$\text{folglich } \frac{25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0}{x-a=0} \\ x=a.$$

Der 3. Zusatz.

195. In der Parabel ist

$$\frac{x=y^2}{x^{1:2}=y} \\ \frac{\frac{1}{2}x^{-1:2}dx=dy}{-\frac{1}{4}x^{-3:2}dx^2=ddy=0} \\ \text{I} \\ \frac{4\sqrt{x^3}=0}{\text{I}=0.}$$

Geht

Setzet ferner:

$$\frac{-dx^2}{4\sqrt{x^3}} = \infty$$

so ist $\sqrt{x^3} = 0$.

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihr möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungs-Punct.

Die 6. Aufgabe.

196. Den Wendungs-Punct in einer krummen Linie zu finden, deren Semio- dinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ (§. 191); so dürfet ihr nur aus der gegebenen Gleichung für die Linie den Werth von dy durch dx exprimiren, und ihr werdet, wie vorhin, den Werth von x in unveränderlichen Grössen finden können.

Zusatz.

197. Es sey in der Conchoide des Nico- Tab. IX, medis $BA = a$, $BC = b$, $Cq = a'$, $CM = y$, Fig. 79. so ist (§. 296 P. I.).

$$\frac{z + a = y}{ax = dy.}$$

See see a

See

Ferner ist $Bq = \sqrt{(zz - bb)}$, und weil bey t und B rechte Winkel sind, die Winkel S und q aber, deren Unterscheid qCS unendlich klein ist, einander gleich seyn (*J. 183 Geom.*).

$$Bq:BC = St:tq \\ \sqrt{(zz - bb)}:b = dz:bdz:\sqrt{(zz - bb)}$$

und, weil die Ausschnitte Cqt und CMr ähnlich sind,

$$Cq:qt = CM:Mr \\ z:bdz = z \mp a:Mr \\ \sqrt{(zz - bb)}$$

demnach ist $Mr = (z \mp a)bdz : z\sqrt{(zz - bb)} = dx$, folglich

$$(z \mp a)bdz = zdx\sqrt{(zz - bb)} \\ \hline dz = dy = zdx\sqrt{(zz - bb)}:(bz \mp ab).$$

Wenn man demnach dx für unveränderlich annimmt, so ist $ddy = (bz \mp ab)\sqrt{(z^2 - b^2)} dzdx : (bz \mp ab)^2 \mp (bz^3 \mp abz^2) dzdx : (bz \mp ab)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} - bz dzdx \sqrt{(z^2 - b^2)} : (bz \mp ab)^2 = ab dzdx \sqrt{(z^2 - b^2)} : (bz \mp ab)^2 \mp (bz^3 \mp abz^2) dzdx : (bz \mp ab)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} = (2abxz^2 - ab^3 \mp bz^3) dzdx : (ab \mp bz)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} =$ (wenn man für dz seinen Werth sehet), $(2abz^3 - ab^3z \mp bz^4) dx^2 : (ab \mp bz)^3$.

Sehet nun in der Gleichung $yddy = dx^2 \mp dy^2$ (§. 191) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habt ihr

$$(ab \mp$$

$$\begin{aligned}
 & (ab + bz) \cdot (2az^3 - ab^2z + z^4) dx^2 : (ab + bz)^3 \\
 & = dx^2 + (z^4 - b^2z^2) dx^2 : (ab + bz)^2 \\
 \hline
 & 2az^3 - ab^2z + z^4 = (ab + bz)^2 + z^4 - b^2z^2 \\
 & \quad = a^2b^2 + 2ab^2z + z^4 \\
 \hline
 & 2az^3 - 3ab^2z - a^2b^2 = 0 \\
 \hline
 & z^3 - \frac{3}{2}b^2z - \frac{1}{2}ab^2 = 0. \quad 2a
 \end{aligned}$$

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurzel (§. 366, 372 P. I.). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habt ihr die verlangte Linie CM ($= z + a$), welche den Wendungs-Punct determinirt.

Die 5. Erklärung.

198. Wenn eine krumme Linie BDF mit Tab. X. einem Faden überlegt ist, welcher immer Fig. 89. gleich viel gedehnt wird, und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berührt, hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird, so beschreibt der äußere Punct A eine andere krumme Linie AHR, und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR, die Theile des Fadens DH, RF &c. aber die RADIOS der Evolute.

Der 1. Zusatz.

199. Wenn der Punct A in B fällt, und $AB=0$, so ist DH oder der Radius der Evolute
 Eee eee 3

lute dem Bogen BD, sonst aber der Summe zwischen dem Bogen DB und der Linie AB gleich.

Der 2. Zusatz.

Tah. X.
Fig. 89.

200. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circul-Bogen ansehen, welcher mit dem Radio DH, oder FR &c aus dem Mittel Puncte D oder F &c. beschrieben worden ist, und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 48).

Der 3. Zusatz.

201. Weil nur so lange ein Circul-Bogen beschrieben wird, als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie macht; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 28).

Die 7. Aufgabe.

Tah. X.
Fig. 90.

202. Die Länge des Radii der Evolute MC zu finden, wenn die Semiordinaten PM der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen.

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe, ingleichen der Radius Cm dem Radio CM. Ziehet CE mit der Axe AB parallel, bis sie die verlängerte Semiordinate

dnate in E erreicht. Weil bey R und E rechte Winkel sind, und RMm = EMC, indem EMG und CMm (§. 200) rechte Winkel seyn, so ist (§. 183 Geom.)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

Da nun der Mittel-Punct in C ist, woraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio CM beschrieben wird, und dieser unverändert bleibt, indem ME und mR zunimt; so muß die Differentiale des Radii CM, in Ansehung der Differentiale mR der Linie ME, nichts seyn. Nun ist die Differentiale des Radii CM, wenn ihr dx für unveränderlich (das ist, in allen Puncten der Linie von gleicher Größe annehmet, $dzdx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx^2 + zdyddydx : dx^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Derwegen habt ihr

$$(dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$$

$$dzdx^2 + dzdy^2 = -zdyddy$$

$$\frac{dzdx^2 + dzdy^2}{dyddy} = -z$$

$$(dzdx^2 + dzdy^2) : -dyddy = z$$

Das ist, weil $dz = dy$,

$$(dx^2 + dy^2) : -ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und ddy durch x aus der Gleichung für die Krümme Linie exprimiret, so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

203. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

$$\text{Daher } adx = 2ydy$$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2 dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

$$\text{Das ist, } adx^2 : 4x = dy^2.$$

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet,

$$- adx^2 : 4x \sqrt{ax} = ddy.$$

Tab. X.
Fig. 90.

Folglich $(dx^2 \mp dy^2) : - ddy = (4x dx^2 \mp adx^2)x \sqrt{ax} : ax dx^2 = (a \mp 4x) \sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} \mp 4x \sqrt{ax} : a = z = y \mp 4xy : a = PM \mp PE$. Es ist aber $PM = y$, und daher $PE = 4xy : a$.

Der 2. Zusatz.

204. Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

$$\text{so ist } my^{m-1} dy = dx.$$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

$$(mm -$$

$$\begin{aligned} (mm - m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy &= 0 \\ \hline (mm - m)y^{m-2}dy^2 &= -my^{m-1}ddy \\ \hline (m - 1)y^{-1}dy^2 &= -ddy, \end{aligned}$$

Das ist, $(m - 1)dy^2 : y = -ddy$. Demnach ist $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (ydx^2 + ydy^2) : (m - 1)dy^2$.

Nun ist $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowegen, wenn ihr diesen Werth in die Stelle von dx^2 sehet, so bekommet ihr

$$\begin{aligned} (m^2y^{2m-1}dy^2 + ydy^2) : (m - 1)dy^2 &= z \\ \hline (m^2y^{2m-1} + y) : (m - 1) &= z. \end{aligned}$$

Setzt z. E. $m = 2$, so ist $4x\sqrt{x} + \sqrt{x} = z$, welche Gleichung mit der vorigen übereinkommt, wenn $a = 1$.

Anmerkung.

205. Wenn euch das Differentiiren beschwerlich fallen will; so brauchet den Vortheil, wodurch wir oben (§ 24 seqq) die Regeln zur Differentiiren, zu finden, angewiesen haben.

E N D E

des

vierten Theils.

Eee eee 5

An,

Anhang
zu der

Algebra,

worinnen

ihr Nutzen
in verschiedenen Wissenschaften
durch Exempel
gezeigt wird.

Die 1. Erklärung.

1. **D**ie Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Körper bewegt, ist die Verhältniß des Raums zu der Zeit.

Zusatz.

2. Es sey der Raum $= r$, die Zeit $= t$, die Geschwindigkeit $= c$; so ist die Geschwindigkeit $= r:t$ und $r = tc$.

Die 2. Erklärung.

3. Die Materie eines Körpers ist diejenige, welche mit ihm wiegt und bewegt wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schwere jederzeit proportional.

Die

Die 3. Erklärung.

5. Die Grösse der Bewegung erwächst, wenn die Materie des Körpers durch die Geschwindigkeit der Bewegung multiplicirt wird.

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Körpers $= c$, seine Materie $= m$; so ist die Grösse der Bewegung $= mc$.

Die 1. Aufgabe.

7. Die Lehrsätze zu finden, nach welchen die Bewegungen zweier Körper, welche sich die ganze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen, verglichen werden.

Auflösung.

Es sey der eine Körper A, seine Geschwindigkeit C, seine Materie M, die Zeit seiner Bewegung T, der Raum, welchen er durchlaufen hat R, die Grösse der Bewegung Q. Der andere Körper a, seine Geschwindigkeit c, seine Materie m, die Zeit seiner Bewegung t, der Raum, welchen er durchlaufen hat r, die Grösse seiner Bewegung q. So ist $C = R : T$ und $c = r : t$ (§. 2). $Q = CM$, und $q = cm$ (§. 6). Solchergehalt habt ihr

$$\text{I. } C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$$

$$\text{II. } Q : q$$

$$\text{II. } Q:q = CM:cm$$

Setzet $C=c$, so ist $R:T=r:t$ folglich

$$\text{III. } R:r = T:t.$$

Setzet $Q=q$, so ist $CM=cm$. Folglich

$$\text{IV. } C:c = m:M.$$

Setzet ferner $T=t$, so ist

$$\text{V. } R=r.$$

Setzet $C=c$, so ist

$$\text{VI. } M=m.$$

Wiederum, weil $C:c = (R:T):(r:t)$, so ist $CTr = cR$, folglich

$$\text{VII. } T:t = cR:Cr.$$

$$\text{VIII. } R:r = TC:tc.$$

Setzet $T=t$, so ist $Cr = cR$. Folglich

$$\text{IX. } C:c = R:r.$$

Setzet $R=r$, so ist $CT = cC$. Folglich

$$\text{X. } C:c = t:T.$$

Weil $Q:q = CM:cm$, so ist $Qcm = qCM$, folglich

$$\text{XI. } C:c = Qm:qM.$$

$$\text{XII. } M:m = Qc:qC.$$

Setzet $C=c$, so ist $Qm = qm$. Folglich

$$\text{XIII. } Q:q = C:c.$$

Endlich weil

$$C:c = (R:T):(r:t)$$

$$Q:q = CM:cm$$

$$\text{so ist } CQ:cq = cRCM:Trcm$$

$$CQTrcm = cqRCM$$

$$QTrm = qRCM,$$

Dannenhervo ist

XIV.

$$\text{XIV. } Q:q = tRM:Trm.$$

$$\text{XV. } T:t = qRM:Qrm.$$

$$\text{XVI. } R:r = QTm:qtM.$$

$$\text{XVII. } M:m = QTr:qtR.$$

Anmerkung.

8. Es ist nicht nöthig zu erinnern, wie die gefundenen Lehrsätze ausgesprochen werden, weil solches denen zur Genüge bekannt seyn muß, welche das Vorhergehende verstanden haben. Aber wohl ist nöthig, daß ich ermahne, man solle sich diese Lehrsätze wohl bekannnt machen, weil man sie in Auflösung anderer Aufgaben gar öfters vonnöthen hat. Mercket aber zugleich, wie man so viele Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielend heraus bringen kann, welche sonst durch viele Umwege zuerweisen, und noch schwehrender zuerfinden, wären.

Die 2. Aufgabe.

9. Die Gesetze zu finden, nach welchen die schwehren Körper in einem Raume, wo ihnen kein Widerstand geschieht, herunter fallen.

Auflösung.

- I. Es ist aus der Erfahrung klar, daß, wenn ein schwehrender Körper herunter fällt, seine Bewegung um so viel geschwinder wird, je länger er fällt. Woraus denn folgt, daß die Schwere dem Körper nach und nach einen neuen Druck geben muß, da die Wirkung des ersten noch nicht vergangen, indem kein Widerstand vorhanden ist. Da nun in den Höhen, in welchen wir es versuchen können, die Schwere der Körper einerley gefunden wird; so können wir

wir annehmen, daß die Schwebre in jedem Augenblicke dem Körper einen gleichkräftigen Druck gebe. Es sey also der Augenblick t , die Geschwindigkeit, welche der Körper in einem erlangt c ; so ist nach Verfließung $2t$ die Geschwindigkeit $2c$, nach Verfließung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Räume, welche die Körper durchlaufen, wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 2, VIII). Daher ist der Raum, durch welchen der Körper in dem ersten Augenblicke gefallen ist, tc ; zu Ende des andern Augenblicks ist sein Raum, welchen er durchgelaufen hat $4tc$; zu Ende des dritten $9tc$; zu Ende des vierten $16tc$; zu Ende des fünften $25tc$; &c. Demnach verhalten sich die Räume gegen einander wie $1tc$: $4tc$: $9tc$: $16tc$: $25tc$ &c. das ist, wie 1 : 4 : 9 : 16 : 25 &c. oder die Quadrate der Zeiten.

II. Zieheth nun die Höhe, durch welche der Körper in dem ersten Augenblicke gefallen ist, von der Höhe ab, durch welche er in zween gefallen ist; so bleibt für den andern Augenblick 3 übrig, eben so findet ihr für den dritten 5, für den vierten 7, für den fünften 9, &c. Solchergestalt wird die Bewegung der schwebren Körper nach den ungeraden Zahlen geschwinde gemacht.

III. Da nun $R:r = T^2:t^2$, so ist $\sqrt{R}:\sqrt{r} = T:t$.
 Ihr

Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurzeln des Raums andeuten.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die Abscissen für R annehmet, so sind die Semiordinaten \sqrt{R} .

V. Wiederum, weil $R:r = C^2:c^2$; so ist $\sqrt{R}:\sqrt{r} = C:c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurzeln des Raums ausdrücken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind, so sind die Semiordinaten \sqrt{R} , und also $= C$.

Zusatz.

10. Wenn in dem Triangel AEI die Abscissen $AB, AC \&c. = T$, die Semiordinaten $BF, CG \&c. = C$ angenommen werden; so sind die Triangel $= \frac{1}{2}TC = R$. Wenn ihr nun setzt, daß alle Ordinaten BF, CG, DH, EI einander gleich sind: so werden die Triangel Rectangula, deren Inhalt $= TC$. Da nun TC den Raum vorstellet, welchen der Körper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlaufen würde, welche er zu Ende der Zeit hat, wenn er sie gleich anfangs hätte, und stets dieselbe unverändert behielte; so ist klar, daß dieser Raum sich zu jenem verhält, wie TC zu $\frac{1}{2}TC$, das ist, wie 1 zu $\frac{1}{2}$, oder wie 2 zu 1.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit, in welcher ein Körper durch eine gewisse Höhe gefallen ist, zu finden, wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen ist.

Auf

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit t , die Zahl der Theile m , der Raum in dem ersten Theile x ; so ist der Raum in dem letzten $2mx - 2x + x$ (*J. 9 § 69 Arithm.*) $= 2mx - x$, und die Summe in allen Theilen der Zeit m^2x (*J. 113 P. I. Alg.*). Setzet nun den ganzen Raum a , so ist $m^2x = a$

$$x = a : m^2.$$

Es sey z. B. $a = 125$, $m = 5$ Secunden, so ist $x = 125 : 25 = 5$. Also ist der Körper in der ersten Secunde 5, in der andern 15, in der dritten 25, in der vierten 35, in der fünften 45' gefallen.

Die 4. Aufgabe.

Tab. XI.
Fig. 92.

12. Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wieder die Wand AB geworfen, man soll den Winkel EDG finden, welchen die Linie ED, nach welcher sie zurück prallt, mit AB macht. Wir wollen CDF den Einfallswinkel, EDG aber den Reflexionswinkel nennen.

Auflösung.

Lasset aus C und E die perpendicular-Linien CF und EG fallen. Es sey $CF = a$, $EG = b$, $FG = c$, $DF = x$; so ist $DG = c - x$, $CD^2 = aa + xx$, $DE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Da nun die Natur immer den kürzesten Weg geht, so muß die Kugel in D dergestalt zurück prallen, daß sie bis E den kürzesten Weg nimmt, welchen

chen sie aus C durch das Zurückprallen von der Fläche AB nehmen kan. Und demnach ist $CD + DE$ die kleinste Grösse von ihrer Art. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, deren Gleichung

$$\sqrt{(aa+xx)} + \sqrt{(bb+cc-2cx+xx)} = y$$

$$\text{so ist } xdx : \sqrt{(aa+xx)} + (xdx - cdx) : \sqrt{(bb+cc-2cx+xx)} = dy = 0 \quad (\S. 20 P. II.)$$

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)} + (x-c)\sqrt{(aa+xx)} = 0$$

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)} = (c-x)\sqrt{(aa+xx)}$$

das ist, $FD \cdot ED = DG \cdot CD$.

Folglich $FD : CD = DG : DE$, und daher der Reflexions-Winkel EDG dem Einfallswinkel CDF gleich (§. 52, 182 Geom.).

Zusatz.

13. Hieraus sehet ihr zugleich, daß, wenn ein Strahl des Lichts CD auf einen Spiegel fällt, er dergestalt in E reflectirt wird, daß der Reflexions-Winkel EDG dem Einfallswinkel CDF gleich ist.

Die 5. Aufgabe.

14. Aus der gegebenen Weite eines Tab. XI. strahlenden Punctes A von dem Mittel- Fig. 93. Puncte Beines sphärischen Spiegels DEF den Punct zu finden, wo der reflectirte Strahl DC mit der Are vereinigt wird.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $BD = BE = r$, $BC = x$, so
(Wolfs Mathes. Tom. IV.) §ff tff ist

ist $CE = r - x$. Weil das Auge, welches den strahlenden Punct A in dem Spiegel sieht, in der Aye AE steht, so muß der Punct D, von welchem der Strahl, welcher in das Auge fällt, reflectirt wird, der Aye AE überaus nahe seyn. Und dannenhero ist $DC = CE = r - x$, die Winkel m, n, p und q sind unendlich klein, und daher ist $DB : AB = m : n$, und $DC : CB = q : p$, folglich auch $DB + AB : AB = m + n : n$. Da nun $q = m + n$ (§. 101 Geom.), und $p = n$ (§. 13); so ist $DB + AB : AB = q : p$. Derowegen ist (§. 28 Arithm.)

$$DE + AB : AB = DC : BC$$

das ist, $AE : AB = EC : BC$

$$a + r : a = r - x : x$$

$$ax + rx = ar - ax$$

$$2ax + rx = ar$$

$$x = ar : (r + 2a)$$

$$r - x = r - ar : (r + 2a) = (r^2 + ar) : (r + 2a),$$

das ist, $EC = AE \cdot BE : (BE + 2AB)$, oder, wenn ihr $AE = r + a = d$ setzet, $= dr : (2d - r)$.

Der I. Zusatz.

15. Wenn d grösser ist als r , so ist auch $2d : (2d - r)$ grösser als 1 (§. 78 Arithm.); und daher $\frac{1}{2}r \cdot 2d : (2d - r) = dr : (2d - r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, das ist, wenn der strahlende Punct A vor dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Semidiameter des Spiegels BE austrägt; so

so ist die Weite des Bildes EC grösser als der vierte Theil des Diameters.

Der 2. Zusatz.

16. Wenn d grösser ist als r , so ist auch $2d - r$ grösser als d , und daher $d : (2d - r)$ weniger als 1 (§. 78 *Arithm.*), folglich $dr : (2d - r)$ weniger r , das ist, die Weite des Bildes von dem Hohl-Spiegel ist geringer als der halbe Diameter.

Der 3. Zusatz.

17. Wenn $a = r$, so ist $dr : (2d - r) = rr : (2r - r) = r$, das ist, wenn der strahlende Punkt um den halben Diameter des Spiegels von ihm weg ist, oder in seinem Mittel-Puncte steht, so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

18. Wenn $d = \frac{1}{2}r$, so ist $2d = r$ und $rd : (2d - r) = dr : 0$, das ist, die Weite des Bildes von dem hohl = Spiegel wird unendlich groß, weil der Nenner, in Ansehung des Zehlers, zu nichts wird, das ist, die Strahlen werden mit der Axe parallel, denn in diesem Falle können sie niemals mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

19. Wenn d kleiner ist als r , und $2d$ grösser als r (oder d grösser als $\frac{1}{2}r$); so ist $2d : (2d - r)$ grösser als 1. Denn setzet: $2d = r + m$, so ist $2d - r = m$, und daher $2d : (2d - r) = r + m : m$. Und demnach $\frac{1}{2}r \cdot 2d : (2d - r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, Derowegen wird das Bild ausser dem Hohl-

Spie-

Spiegel gesehen, wenn die Sache zwischen dem Mittel-Puncte und dem Brenn-Puncte liegt, welcher (§. 21) um $\frac{1}{2}r$ von dem Spiegel weg ist.

Der 6. Zusatz.

20. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, so hat der Nenner $2d - r$ das Zeichen —. Denn, setzt $2d = r - m$, so ist $2d - r = -m$. Und also hat der ganze Bruch $dr : (2d - r)$ das Zeichen —. Derowegen muß der Ort des Bildes hinter dem hohl-Spiegel seyn, wenn die Sache zwischen dem brenn-Puncte und dem Spiegel liegt.

Der 7. Zusatz.

21. Wenn d unendlich groß wird, das ist, wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, so ist r , in Ansehung $2d$, für nichts zu halten, und demnach ist $dr : (2d - r) = dr : 2d = \frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

22. Wenn der Spiegel erhaben ist, so ist $d = a - r$, und daher bekommt ihr an statt $(rr \mp ar) : (2a \mp r)$ die Linie $EC = (ar - rr) : (2a - r) = dr : (2d \mp r)$. Denn, weil $2a - 2r = 2d$, so ist $2a - r = 2d \mp r$. Weil nun hier d allezeit größer ist als r (denn sonst müßte die Sache innerhalb dem Spiegel stehen), und $d : (2d \mp r)$ weniger als 1; so ist auch $dr : (2d \mp r)$ weniger als r . Derowegen wird das Bild zwischen dem Mittel-Puncte des Spiegels und seiner Fläche gesehen, die Sache mag so weit weg seyn als sie will.

Der

Der 9. Zusatz.

23. Setzet d unendlich groß, so ist r , in Ansehung $2d$, unendlich klein, und dannenhero $dr : (2d + r) = dr : 2d = \frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemals weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen, als den vierten Theil des Diameters, wenn es gleich unendlich weit weg steht.

Anmerkung.

24. Es ist nicht nöthig zuerinnern, daß, wenn d und r durch Zahlen gegeben werden, auch die Weite des Bildes von der Spiegel-Fläche in Zahlen herauskomme, und ihr auch daher die Verhältniß der Weite zu dem Diameter des Spiegels finden können.

Der 10. Zusatz.

25. Wenn r unendlich groß wird, so ist der Spiegel platt, und alsdenn ist $2d$, in Ansehung r , unendlich klein. Derowegen wird in diesem Falle $dr : (2d + r) = dr : r = d$, das ist, in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter ihm, als die Sache vor ihm.

Der 11. Zusatz.

26. Setzet, die Weite des strahlenden Punctes in einem hohl-Spiegel werde nd , so ist die Weite des Bildes $ndr : (2nd - r)$. Derowegen, wenn die Weiten des strahlenden Punctes von dem hohl-Spiegel sich gegen einander verhalten wie d zu nd , so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr : (2d - r)$ zu $ndr : (2nd - r)$, das ist, wie $1 : (2d - r)$ zu $n : (2nd - r)$, oder wie $2nd - r$ zu

fff fff 3

2nd

$2nd - nr$. Wenn nun n eine ganze Zahl, und d grösser als r ist; so ist $2nd - nr$ kleiner als $2nd - r$. Derwegen, wenn der strahlende Punct ausser dem Mittel-Puncte des Spiegels ist, so geht das Bild näher zu dem Spiegel, wenn der strahlende Punct weiter davon weageht. Hingegen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd - nr$ grösser als $2nd - r$. Derwegen, wenn der strahlende Punct von dem hohl Spiegel weiter weg ist als der Mittel-Punct desselben, so geht das Bild von dem Spiegel weg, wenn der strahlende Punct sich demselben nähert.

Der 12. Zusatz.

27. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, und nd gleichfalls kleiner als $\frac{1}{2}r$, so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r - 2nd$ zu $rn - 2nd$. Wenn nun n eine ganze Zahl ist, so ist $rn - 2nd$ grösser als $r - nd$, das ist, wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weg geht, so geht auch das Bild davon weg. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $r - 2nd$ grösser als $rn - 2nd$, das ist, wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommt, so kommt ihm auch das Bild näher.

Der 13. Zusatz.

28. Es werde gleichfalls bey einem erhabenen Spiegel die Weite des strahlenden Punctes nd , so wird die Weite des Bildes von dem Spiegel $ndr : (2nd + r)$, das ist, wenn die Weiten des strahlenden Punctes sich verhalten

ten wie d zu nd ; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie $dr : (2d + r)$ zu $ndr : (2nd + r)$, das ist, wie $1 : (2d + r)$ zu $n : (2nd + r)$, oder wie $2nd + r$ zu $2nd + nr$. Wenn nun n eine ganze Zahl ist, so ist $2nd + nr$ grösser als $2nd + r$. Derowegen, wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weg geht, so geht auch das Bild zurück. Hingegen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd + nr$ kleiner als $2nd + r$. Derowegen, wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommt, so kommt ihm auch das Bild näher.

Die 6. Aufgabe.

29. Das Gesetz der Natur zu finden, nach welchem die Strahlen des Lichts gebrochen werden, wenn sie aus einem durchsichtigen Körper in einen andern dichten fahren.

Auflösung.

Es werde der Strahl AB in B gebrochen, und fahre in G . Setzet die Geschwindigkeit, mit welcher sich der ungebrochene Strahl AB bewegt, verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie n zu m . Derowegen Tab. XI. ist die Zeit, in welcher die Linie AB durchlau- Fig. 94. fen wird, zu der Zeit, in welcher das Licht durch die Linie BG kommt, wie nBA zu mBG (§. 7). Lasset nun von A und G die perpendicular-Linien AD und GC fallen, und es sey $AD = a$, $CG = b$, $CD = c$, $CB = x$, so ist $BD = c - x$, folglich $BG = \sqrt{(xx + bb)}$, $AB = \sqrt{(aa +$

fff fff 4

cc —

$cc - 2cx + xx$) und $nBA + mGB = n\sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)} + m\sqrt{(xx + bb)}$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß, indem die Natur immer den kürzesten Weg geht; so ist $n\sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)} + m\sqrt{(xx + bb)}$ die kürzeste Zeit, in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kann. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, in welcher $n\sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)} + m\sqrt{(xx + bb)} = y$, so ist (§. 20 P. II.)

$$n(xdx - cdx) : \sqrt{(aa + cc - 2cx + x^2)} + mx dx : \sqrt{(x^2 + b^2)} = dy = 0$$

$$mx : \sqrt{(x^2 + b^2)} = n(c - x) : \sqrt{(aa + cc - 2cx + x^2)}$$

Das ist, $mCB : BG = nDB : AB$

$$mCB \cdot AB = nBD \cdot BG.$$

Setzt $BG = AB$, so ist

$$mCB = nBD:$$

folglich $m : n = BD : BC$.

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum totum annehmet, so ist BD der Sinus des Winkels BAD oder ABK, hingegen BC der Sinus des Winkels BGC oder GBF (§. 97 *Geom. & Trigon.*). Und demnach hat der Sinus des Inclinations-Winkels ABK zu dem Sinu des gebrochenen Winkels FBG beständig einerley Verhältniß.

Die 7. Aufgabe.

Tab. XI. 30. Den Punct f zu finden, wo die
Fig. 95. Strahlen des Lichts, nach geschehener
Re-

Refraction, in dem Glase KL mit der Arc AF vereinigt werden.

Auflösung.

Setzet, der Strahl AD sey dem Strahle AB unendlich nahe, so ist der Winkel A unendlich klein, und die Linie DI welche mit der Arc einen rechten Winkel in I macht, steht auch auf AD perpendicular. Eben so macht macht GH so wohl in G als H einen rechten Winkel. Es sey nun $AD = AB = AI = y$, $Bc = a$, $EC = b$, $BE = f$, $DF = IF = BF = x$, $HF = EF = GF = v$, $Hf = Ef = Gf = z$, $cP = r$; $CM = t$, die Verhältniß der Refraction aus der Luft in das Glas $3 : 2$; so ist $Ac = y + a$, $FC = v + b$, $Fc = x - a$. Weil nun $3 : 2 = cP : cQ$ (§. 29), so ist $cQ = 2r : 3$. Eben so, weil $2 : 3 = CM : CN$ (§. 29), ist $CN = 3t : 2$. Weil ID mit cP parallel, so ist (I. 184 Geom.)

$$Ac : cP = AI : ID$$

$$y + a : r = y : ry : (y + a).$$

Eben so, weil, wegen der rechten Winkel bey D und Q, die Linien ID und cQ parallel sind, ist (I. 184 Geom.)

$$FI : ID = Fc : cQ$$

$$x : ry : (y + a) = x - a : \frac{2}{3}r$$

$$\frac{2}{3}rx = (rxy - ary) : (y + a)$$

$$2rxy + 2arx = 3rxy - 3ary$$

$$3ary = rxy - 2arx$$

$$3ay : (y - 2a) = x.$$

$$\text{Sff fff } s$$

Wie

Wiederum, weil, wegen der rechten Winkel bey M und H, die Linien CM und GH parallel sind, so ist (§. 184 Geom.)

$$FC:CM=FG:GH$$

$$b \mp v : t = v : tv : (b \mp v).$$

Und endlich, weil, wegen der rechten Winkel bey N und H, die Linien CN und GH parallel sind, so ist (§. 184 Geom.)

$$fC:CN=fG:GH$$

$$b \mp z : \frac{3}{2}t = z : tv : (b \mp v)$$

$$\frac{3}{2}tz = (btv \mp tvz) : (b \mp v)$$

$$3btz \mp 3tvz = 2btv \mp 2tvz$$

$$3bz = 2bv - vz$$

$$3bz : (2b - z) = v = x - f$$

$$f \mp 3bz : (2b - z) = x = 3ay : (y - 2a)$$

$$2bfy - fzy \mp 2afz - 4abf \mp 3bzy - 6abz = 6aby - 3azy$$

$$3azy \mp 3bzy \mp 2afz - fzy - 6abz = 6aby \mp 4abf - 2bfy$$

$$z = \frac{6aby \mp 4abf - 2bfy}{3ay \mp 3by \mp 2af - fy - 6ab} = Ef.$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret, und also = o sehet, so verlieren sich alle Glieder, welche durch/multipliciret sind, und ihr bekommt

Ef

$$Ef = z = 6aby : (3ay + 3by - 6ab) = 2aby : (ay + by - 2ab).$$

Anmerkung.

31. Unerachtet die gefundene Regel hauptsächlich dient, den Ort des Bildes zu finden, wenn das Glas auf beyden Seiten erhaben ist, und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Grösse sind; so könnet ihr doch daraus gar leicht auch Regeln vor alle übrigen Fälle herleiten, wie aus folgenden Zusätzen erhellet.

Der 1. Zusatz.

32. Wenn das Glas auf beyden Seiten gleich erhaben ist, so ist $cB = CE$, das ist, $a = b$, und daher $z = 2a^2y : (2ay - 2a^2) = ay : (y - a)$.

Der 2. Zusatz.

33. Wenn cB oder a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL , welche gegen den strahlenden Punct A gekehrt ist, platt, und die Glieder, welche durch a nicht multipliciret sind, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein, oder nichts. Daher ist $z = 2aby : (ay - 2ab) = 2by : (y - 2b)$.

Der 3. Zusatz.

34. Hingegen, wenn b unendlich groß wird, so ist das Glas auf der hintern Seite KEL platt, und die Glieder, worinnen b nicht vorhanden ist, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein. Solcherge stalt ist $z = 2aby : (by - 2ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4. Zusatz.

35. Also ist es gleich viel, ob ihr die erhabene oder platte Fläche eines Glases, welche
auf

auf einer Seite erhaben, auf der andern platt ist, gegen den strahlenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

36. Wenn so wohl a als b unendlich groß werden, so wird das Glas auf beyden Seiten platt, und $ay + by$ werden, in Ansehung $2ab$, unendlich klein. Daher ist $z = 2aby$: — $2ab = -y$. Also kommen die Strahlen nirgends zusammen, als in dem Puncte, wo sie ausfliessen.

Der 6. Zusatz.

37. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein, und daher ist $2ab$, in Ansehung der übrigen Glieder, unendlich klein, folglich $z = 2aby$: $(ay + by) = 2ab$: $(a + b)$ für ein Glas, welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

38. Wenn das Glas beyderseits auf gleiche Art erhaben ist, so ist $z = 2aa$: $2a = a$.

Der 8. Zusatz.

39. Wenn a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL gegen den strahlenden Punct zu platt, und b , in Ansehung a , unendlich klein. Derowegen ist $z = 2ab$: $a = 2b$. Hingegen, wenn b unendlich groß wird, so ist die von dem strahlenden Puncte A weggekehrte Seite KEL platt, und a , in Ansehung b , unendlich klein. Derowegen ist $z = 2ab$: $b = 2a$.

Der

Der 9. Zusatz.

40. Wenn ihr für $\mp b$ in der Regel $-b$ se-
 set, so wird das Glas auf der Seite KBL, ge-
 gen den strahlenden Punct A zu, hohl, und
 $z = -2aby : (ay - by \mp ab)$.

Der 10. Zusatz.

41. Setzet $-a$ für $\mp a$, so wird das Glas
 auf der von dem strahlenden Puncte weg-
 gefehrten Seite hohl, und $z = -2aby :$
 $(by \mp 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

42. Wenn ihr für a und b zugleich $-a$ und
 $-b$ setzet, so wird das Glas auf beyden Sei-
 ten hohl, und $z = 2aby : (-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

43. Wenn a unendlich groß wird, und ihr
 $-b$ für b setzet, so ist das Glas auf der Seite
 gegen den strahlenden Punct platt, auf der
 andern aber hohl, und die Grössen, welche
 durch a nicht multipliciret sind, werden, in
 Ansehung der andern, unendlich klein. Da-
 her ist $z = -2by : (y \mp 2b)$.

Der 13. Zusatz.

44. Wenn b unendlich groß wird, und ihr
 $-a$ für a setzet, so ist das Glas auf der Seite
 gegen den strahlenden Punct zu hohl, auf der
 andern erhaben, und die Grössen, welche
 durch b nicht multipliciret sind, werden, in
 Ansehung der andern, unendlich klein. Da-
 her ist $z = -2ay : (y \mp 2a)$.

Der

Der 14. Zusatz.

45. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen parallel ein, und daher wird (§. 40) $z = -2aby : (ay - by) = -2ab : (a - b)$, (§. 41) $z = -2aby : (-ay + by) = -2ab : (b - a) = (\text{wenn } a = b) -2a^2$, (§. 42) $z = 2aby : (-ay - by) = 2ab : (-a - b) = (\text{wenn } a = b) = a$, (§. 43) $z = -2by : y = -2b$, (§. 44) $z = -2ay : y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

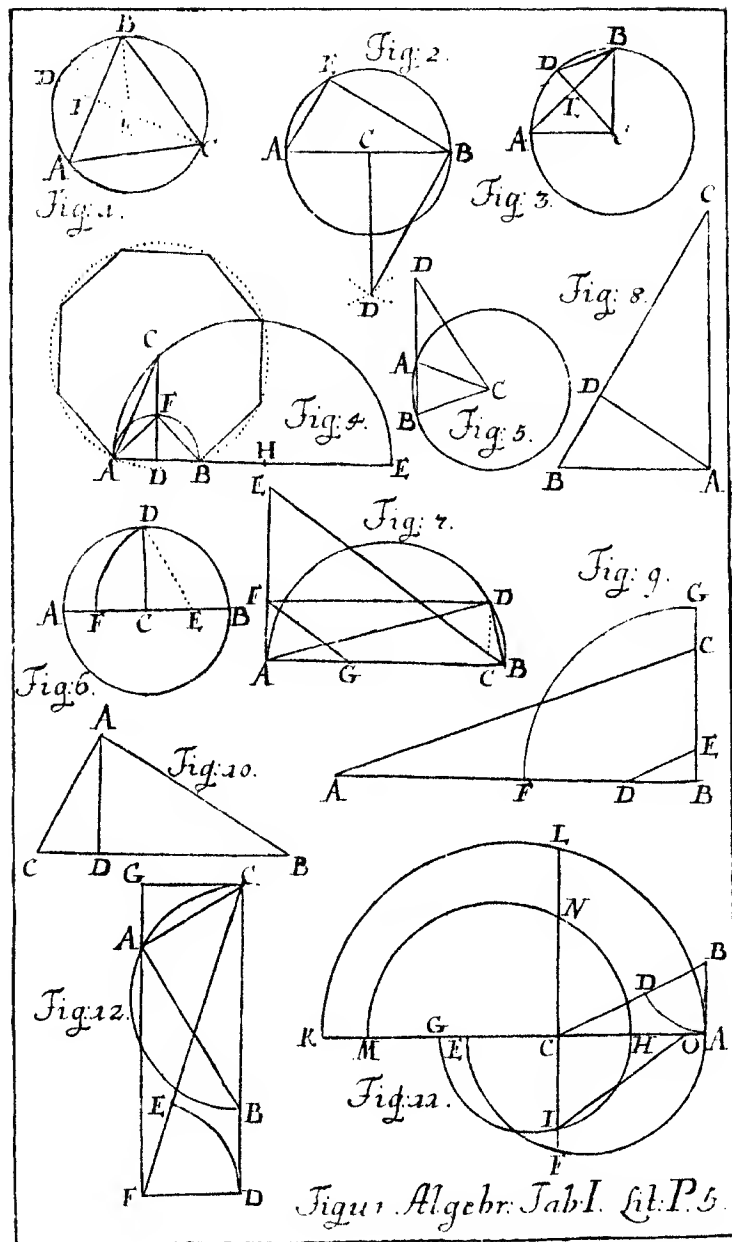
46. Weil in den hohl-Gläsern die Weite des Punctes, wo die gebrochenen Strahlen mit der Ase vereinigt werden, das Zeichen — hat, so ist klar, daß derselbe auf der Seite, gegen den strahlenden Punct zu, gesucht werden muß, und dannenhero die Strahlen in dergleichen Gläsern von der Ase weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe, kan aus den gefundenen Regeln geurtheilt werden.

Anmerkung.

47. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen, wie die Algebra mit großem Vortheile in andern Wissenschaften angebracht wird, und werde ich bey andrer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen.

E N D E
der Algebra.





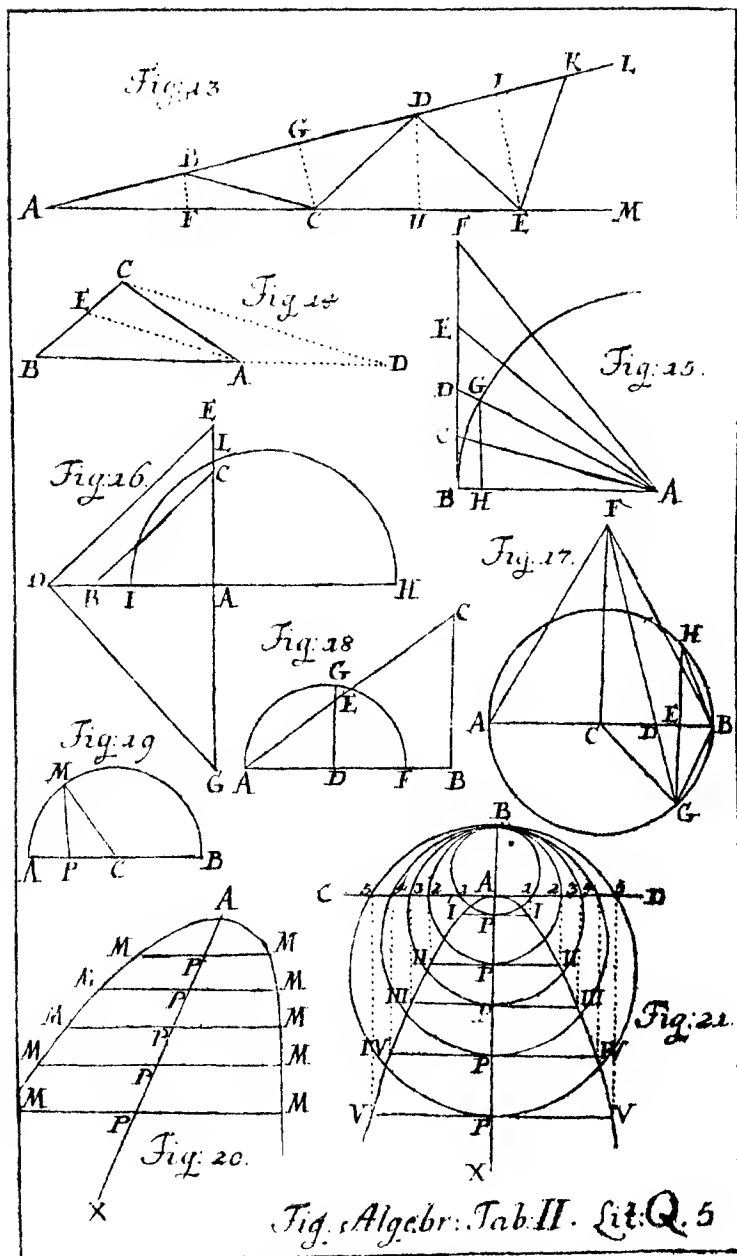
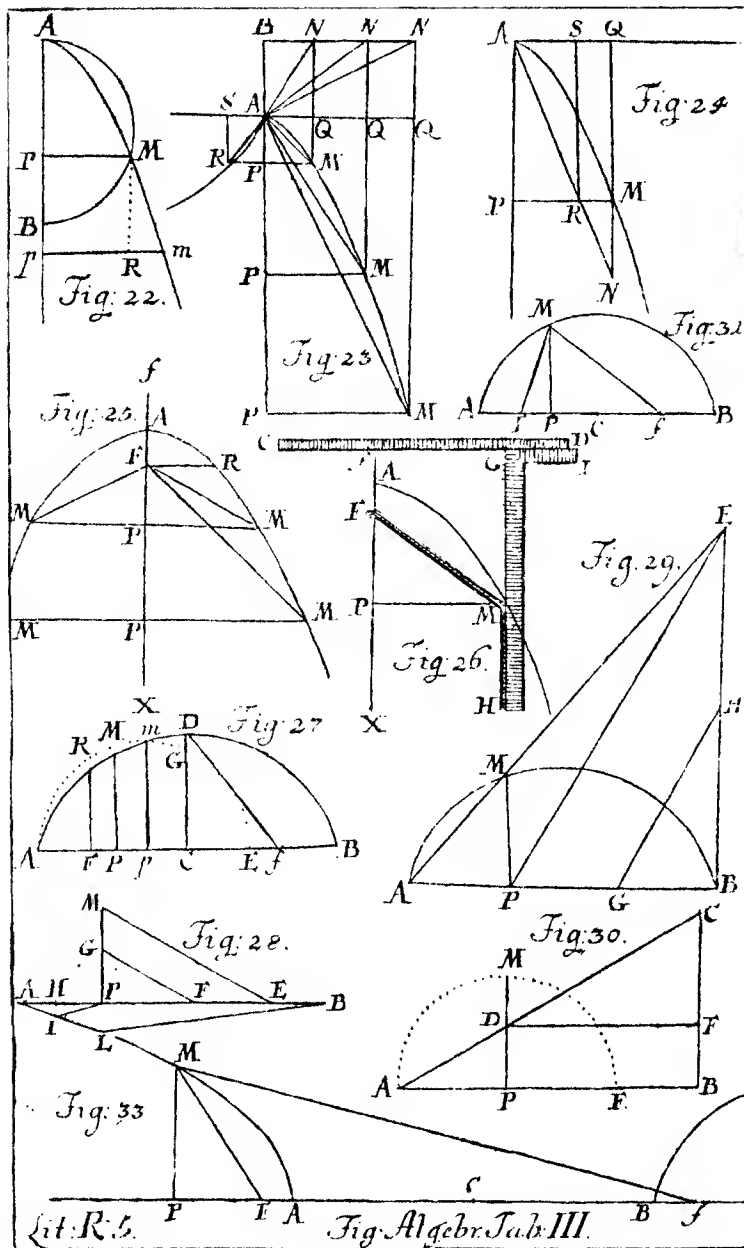
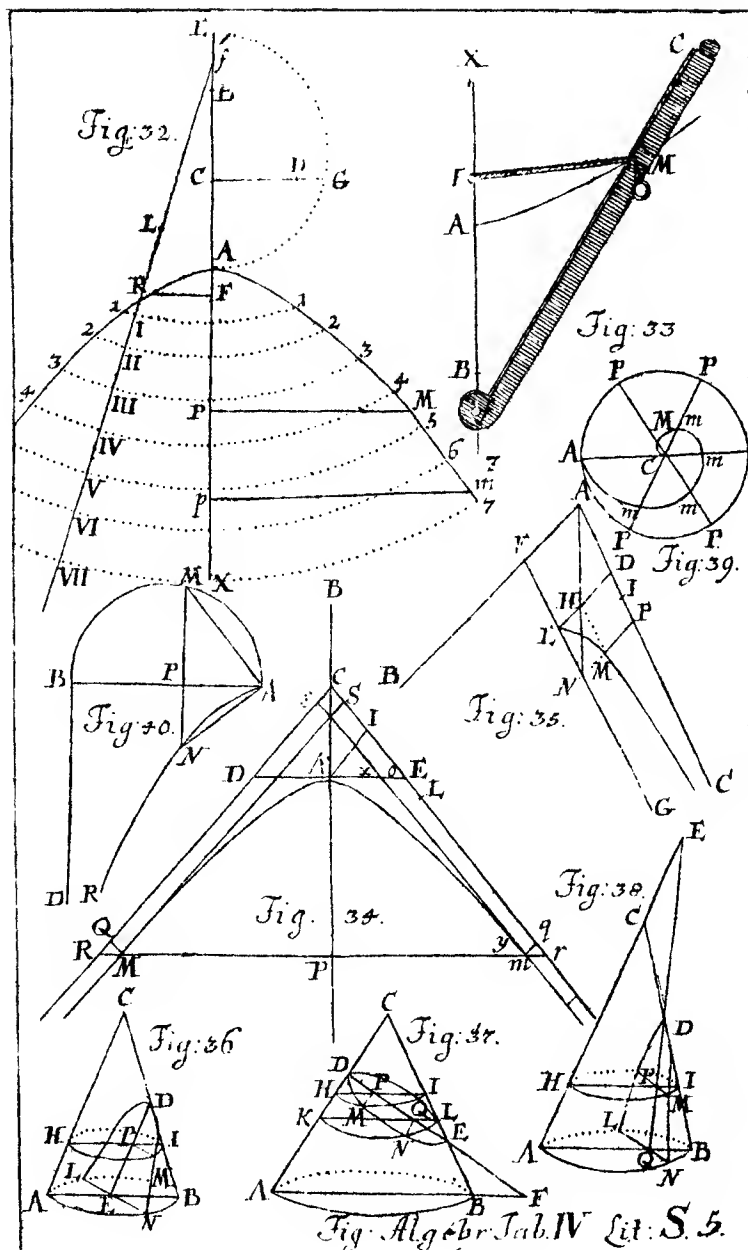
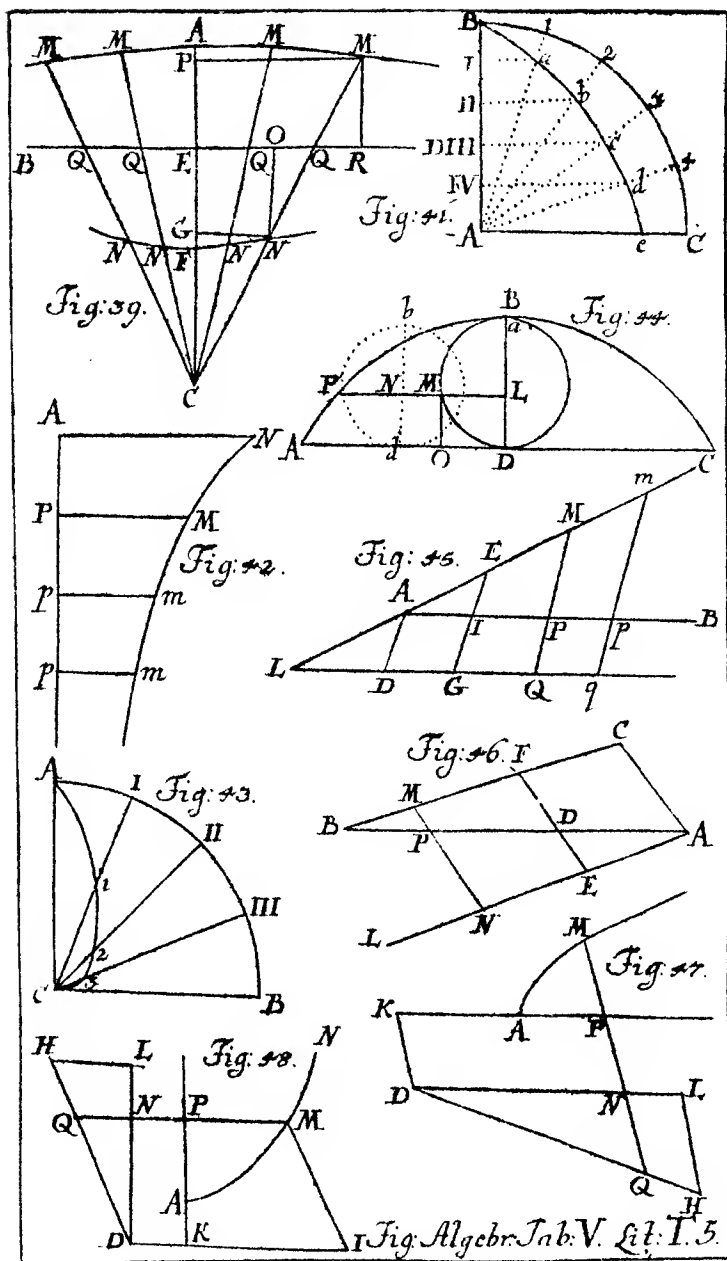
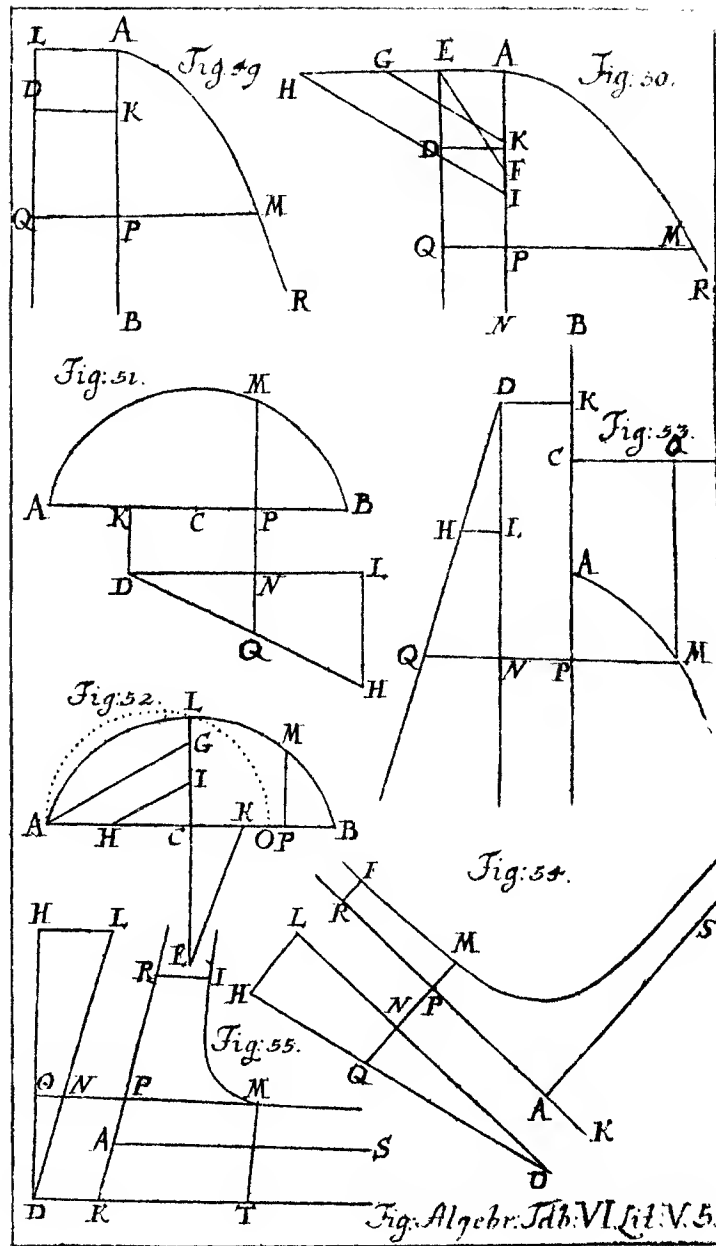


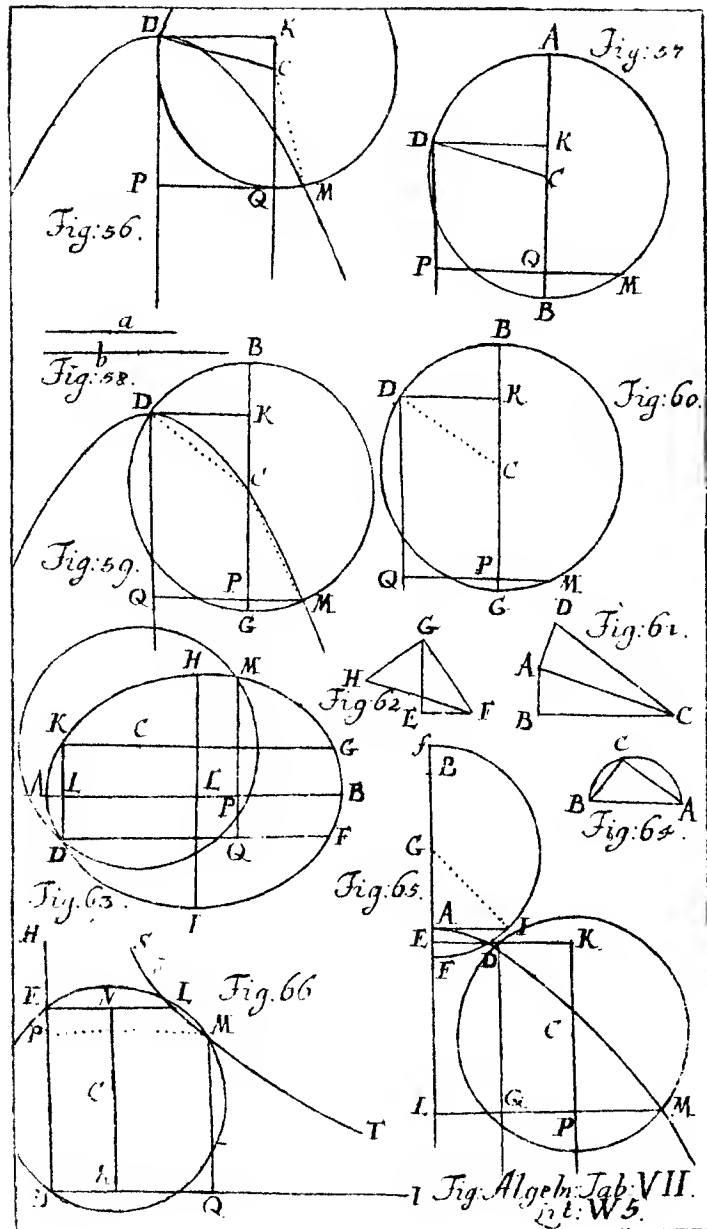
Fig. Algebr. Tab. II. Lit. Q. 5

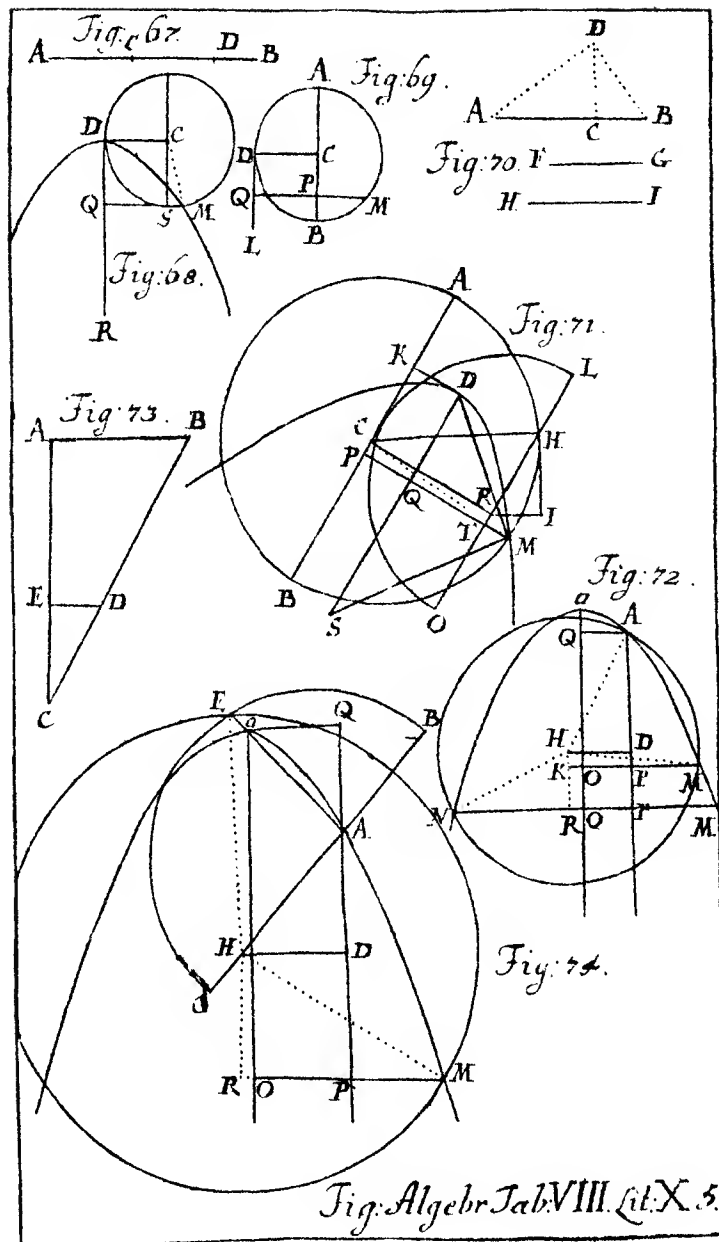


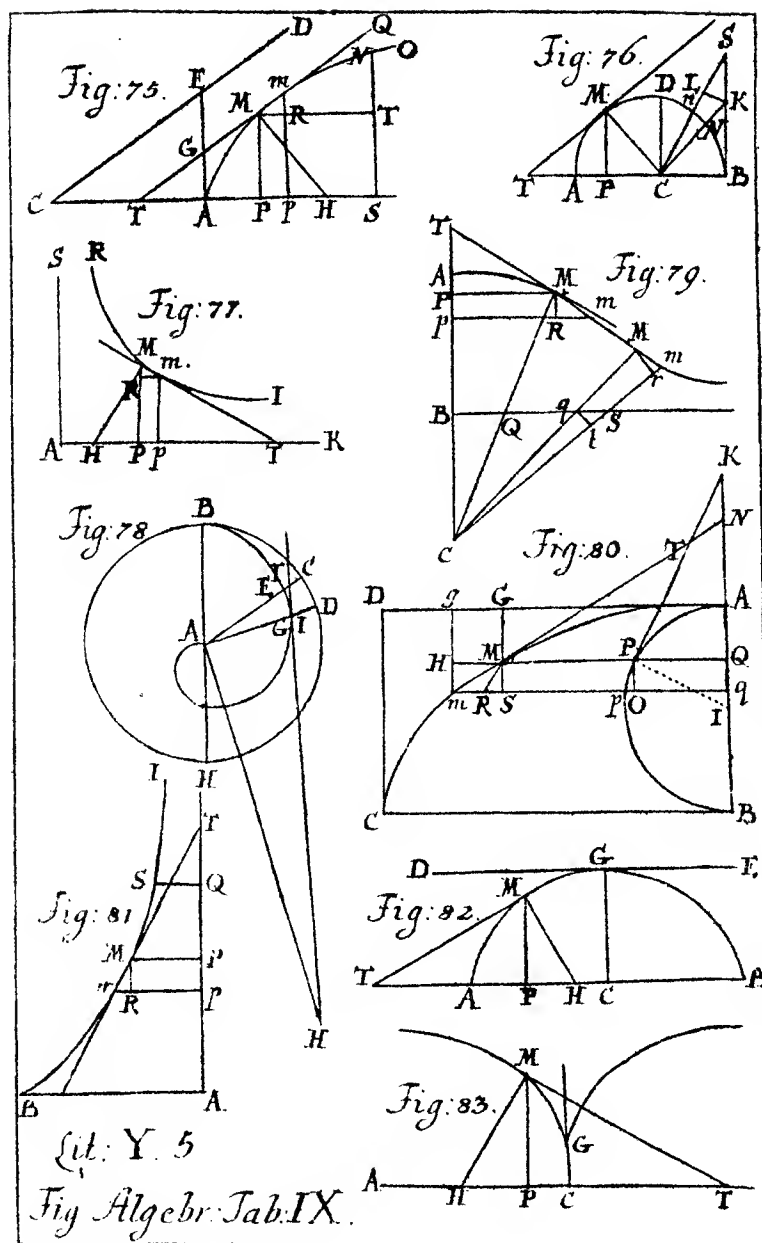


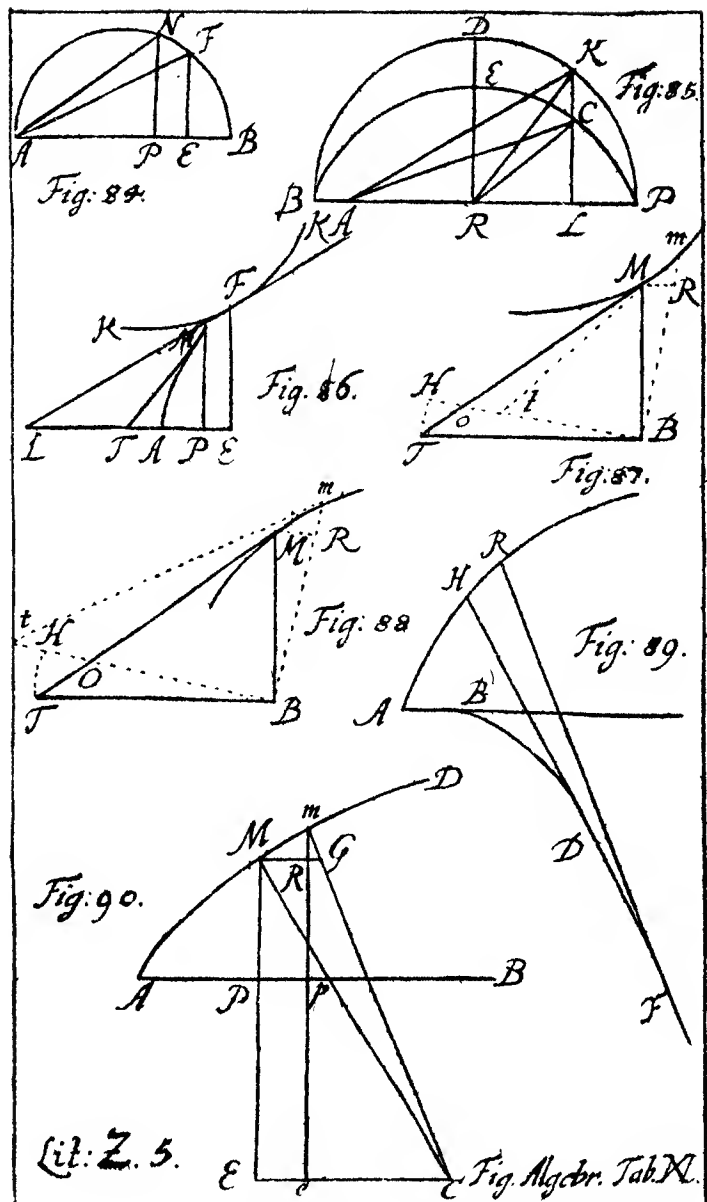


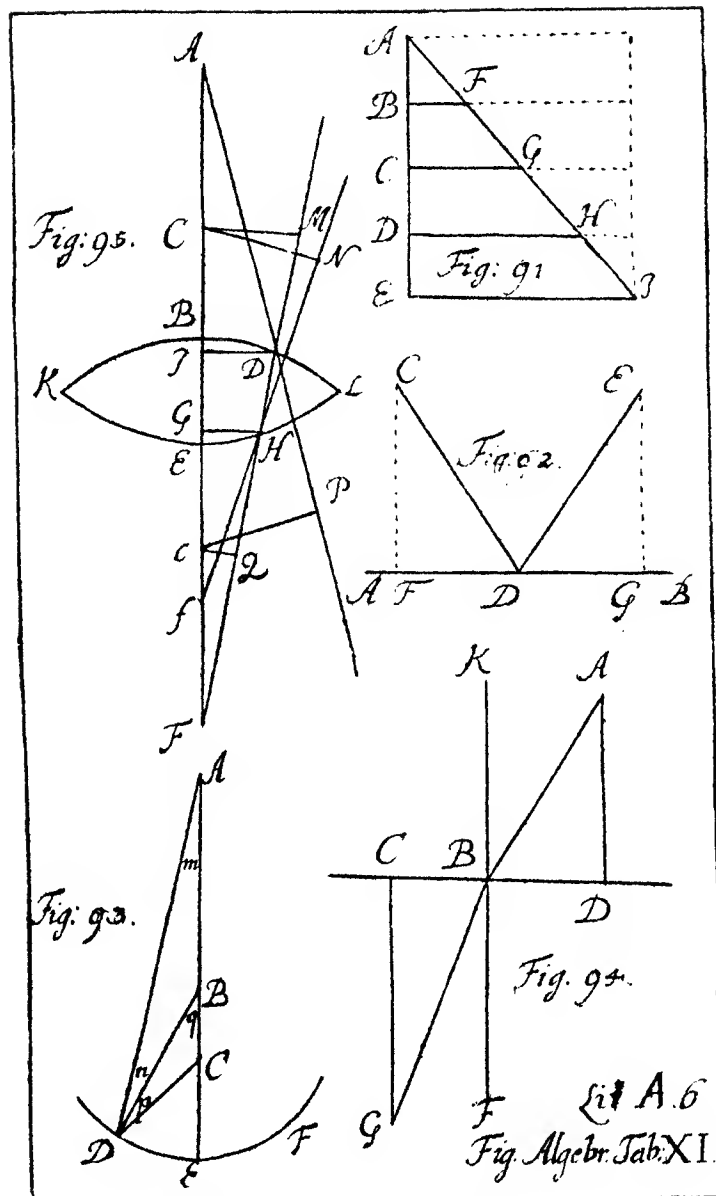












Lit A. 6
 Fig. Algebr. Tab. XI.

Register

über

alle vier Theile

der

Anfangs = Gründe

aller

Mathematischen

Wissenschaften



Register über alle vier Theile.

NB. Die Römische Zahl bedeutet den Theil, die da-
ben gesetzten Ziffern aber die Seiten. Wenn in
dem Anfange keine Römische Zahl steht; so ist
der erste Theil zu verstehen; sonst aber derjenige,
welcher vorher steht.

<i>Ab</i> , III. 1489. 1491	sein Inhalt zu finden sey,
<i>Adan mah</i> , III. 1487	236
Abdachung, II. 609	Abgesonderte Theile, III.
Abend, Erklärung, III.	1088
1133. wie er zu finden sey,	Ablauf, Erklärung, 343.
1138	Zeichnung, 347. 530.
Abend=Demmerung, III.	Gebrauch, 350. 348
1211. Ursachen, 1212.	Abscisse, IV. 1678
wie lange sie währet, 1213	Abchnitt des Circuls, wie
wie das Ende auszurech- nen sey, 1213. 1214	er auszurechnen sey, 297
Abend=Stern, III. 1267	Abweichende Uhr, Erklä- rung, III. 1527. Zeich- nung, 1537. & seqq.
Abend-Uhren, Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1538	Acht=Z ^{te} , wie seine Seite zu finden sey, IV 1649
Abgekürzte Pyramide, wie sie perspectivisch zu zeichnen sey, III. 1069	Achtel=Carthaune, II. 533
Abgekürzter Kegel, wie (Wolf's Mathes. Tom. IV.)	Adar, III. 1489. 1491
	Adar mah, III. 1487
	Addiren, Erklärung, 41.
	§ § § § § Res

Register

- Regeln für ganze Zahlen, 42. 49. für gebrochene, 79. für Buchstaben, IV. 2556. 1557. für irrationale Zahlen, 1569. Probe, I. 51. 52. Zeichen, 53. IV. 1553
- Adler, III. 1190
- Aspecte, Erklärung, III. 1394. Zeichen und Bedeutung, 1594. 1595
- Ähnlichkeit, 118. der Circul, 120. Figuren, 130. 194
- Aequatio centri*, Erklärung, III. 1315. wie sie zu finden sey, 1323
- Aequation der Uhr*, III. 1470
- Aequatio optica*, III. 1315
- - - *physica*, ibid.
- Aequator*, III. 1129. 1434
- Aequinoctial-Uhr*, Erklärung, III. 1527. wie sie zu zeichnen sey, 1528. seq.
- Aequinoctium*, wie es zu beobachten sey, III. 1304
- Aequatoris - Grade*, wie sie in Zeit zu verwandeln seyn, III. 1163
- Aera*, III. 1493
- Aerometrie*, II. 877
- Aestrich*, wie es zuschlagen sey, 463
- Aggregat*, 41
- Aiyar*, III. 1489
- Alcor*, III. 1191
- Algebra*, IV. 1549
- Algebraische Aufgaben in Zahlen*, IV. 1571. in dem menschlichen Leben, 1581. in der gemeinen Geometrie, 1647. in der höheren, 1677
- Algebraische Gleichung*, Nutzen in Erklärung der krummen Linien, IV. 1677
- Algebraische Linie*, Erklärung, IV. 1678. Geschlechter, 1679. allgemeine Gleichung, 1681. Subtangens, 1813
- Altar*, III. 1190
- Alternatio rationum*, IV. 1634
- Altitudo nonagesimi*, III. 1220
- Americanische Gans*, III. 1190
- Amplitudo occidua*, Erklärung, III. 1169. wie sie zu finden sey, 1170. Nutzen, 1171
- Amplitudo ortiva*, Erklärung, III. 1170. wie sie zu finden sey, 1170. 1171. Nutzen, 1171
- Amphora*, III. 1143
- Andreas*, III. 1191
- Andromeda*, III. 1190
- Änder in Mauern*, 435
- Angle de l'épaule*, II. 618
- - *diminué*, ibid.
- - *du centre*, ibid.
- Angulus acutus*, 123
- - *ad Solem*, III. 1315
- - *obtus*, 123
- An-

über alle vier Theile.

<i>Angulus orientis</i> , III. 1220	Höhe, 359. Auslaufung,
- - <i>rectus</i> , 123	361
- - <i>refractionis</i> , III. 933	<i>Arcitenens</i> , III. 1143
Anlage der Böschung, II. 609	Arctische polar=Circul,
Anlauf, Erklärung, 343.	III. 1145
Zeichnung, 347	<i>Arcturus</i> , III. 1190
Anliegende Theile, III. 1088	<i>Arcus inter centra</i> , III. 1399.
Anmerkungen, 30	1403
<i>Anomalia coaequata</i> , III. 1314	<i>Arcus visionis</i> , III. 1208
- - <i>orbis</i> , III. 1345	<i>Ardababesht mah</i> , III. 1487
Antarctische polar=Circul,	<i>Argenavis</i> , III. 1190
III. 1145	Argument der Inclina-
<i>Antares</i> , III. 1191	tion, II. 1338
<i>Antichthonos</i> , III. 1433	<i>Aries</i> , II. 1143
<i>Antipodes</i> , III. 1433	<i>Arithmetica infinitorum</i> , IV.
<i>Aktionis</i> , III. 1190	1644
<i>Aphelium</i> , III. 1312. wie es	Arithmetische Progress-
zufinden sey, 1317. seine	sion, IV. 1612
Bewegung, 1317	„ „ proportional-Zahlen,
<i>Apogäum</i> , III. 1312. wie es	wie sie zu finden seyn, 98
zufinden sey, 1332	„ „ Verhältniß, 72
Apollonische Parabel, IV. 1683	Artillerie. Erklärung, II.
Approchen. Erklärung, II. 726.	517. Nutzen, 515. 516. wie
Beschaffenheit, 737.	sie abzuhandeln sey, 515
wie sie zuführen seyn, 729.	Art zuzehlen, 46
zu hindern, 731	Ascensional = Differenz.
April, III. 1484	Erklärung, III. 1161. wie
<i>Apsidium linea</i> , III. 1312.	sie zu observiren sey, 1161
1314	<i>Ascensio obliqua</i> , III. 1161
Arabisches Jahr, III. 1490	- - <i>recta</i> , III. 1159
<i>Aræoslyton</i> , 395	<i>Asini</i> , III. 1191
<i>Arcade</i> , 393	<i>Astrolabium</i> , 123
Architrab. Erklärung, 342.	Astronomie. Erklärung,
wesentliche Glieder, 351.	III. 1125. Nutzen, 1124
	Astronomisches Fern-
	Glas, III. 1037
	Astronomische Stunden,
	III. 1471
	Esq 992 2 Asym-

Register

Asymptoten.	Erklärung,	ten, 632.	ihre Beschaf-
IV. 1704.	wie sie zusam-	menheit, 636.	Profil,
den seyn,	1837		689
Athyra,	III. 1485	Außere Polygon,	II. 616
Attaquen,	II. 721	Ausscheidung der Wurzeln,	
Attisches Jahr,	III. 1489	Erklärung, 83.	Regeln,
Aufgabe, 28.	wie sie alge-	86. 91. Probe, 88. 94	
braisch aufzulösen sey, IV.		Axe der Laffeten, wie sie	
1571. 1573		zuzeichnen sey,	II. 550
Aufgang der Sonne. Wie		Axiomata,	17
er zu finden,	II. 1169	Axis mundi,	III. 1129
, , der Sterne, III. 1132.		Axis in peritrochio.	Erklä-
1200		rung, II. 749.	Eigen-
Auge, woraus es besteht,		schaften,	778
II. 953. sqq. Veränderun-		Azimuth. Erklärung, III.	
gen, welche bey dem Se-		1169. wie solches zu finden	
hen darinnen vorgehen,		sey,	1170. 1171
955. Beschaffenheit,		Azimuthal=Quadrant, III.	
wenn es in die Ferne und		1169	
in die Nähe siehet, 958			
Aufgemachte Thür, wie sie			
in das Perspectiv zubrin-			
gen sey,	III. 1073		
Augen=Gläser, III. 1033			
Augen=Punct, III. 1066			
August=Monat, III. 1484			
Augustus, III. 1484			
Aufhebung eines Bruchs,			
78			
Aufriß. Erklärung, 509.			
wie er zumachen sey, 509			
Ausladung, 340			
Aussage, 22			
Ausschnitt des Circuls,			
187			
Ausdehnen, II. 879			
Außen=Werkze, wozu sie			
dienen, II. 631. ihre Art			

über alle vier Theile.

- Bastion*, II. 613
Bathseba, III. 1191
Batterie, Erklärung, II. 733. Zeichnung, *ibid.*
Bau=Art der Alten, 337
Bau=Holz, wie es beschaffen seyn soll, 318. wie es zufallen, 319. 320. zu trocknen, 320. in dem Baue zu sehn sey, 321
Bau=Kunst, 305
Bau=Meister, 305
Bau=Unkosten, wie sie in dem Festungs=Baue zu rechnen seyn, II. 713
Bau=Zug, 315
Bedeckung der Fern=Gläser, Erklärung, III. 1048.
Nutzen, 1049. wie sie zu finden seyn, 1049
Bedingung, 22. 23
Behemans mab, III. 1487
Begriff, 6. 8
Benennung, IV. 1571
Bequemlichkeit des Gebäudes, 306
Berge im Monde, III. 1255. 1256. ihr Schatten, 1257. ihre Größe, 1383
= in der Venere, III. 1267
Bermé, Erklärung, II. 627
Beständige Defens=Linie, Erklärung, II. 619. Größe, 619. 620
Bewegliche Feste, III. 1509
Bewegung, Regeln insgemein, IV. 1915. insbesondere für die schweben Körper, 1917. 1919. wie sie gesehen wird, II. 956. 981. 982. 984
Bewegung des Mondes, III. 1139. 1353
= der Planeten, III. 1284
= der Sterne, wie vielerley sie seyn, III. 1140
Bewegungs=Kunst, II. 745
Beweis, 24. 27
Hey einander, wenn die Bilder zweyer Sachen gesehen werden, III. 979. 980
Bild im Auge, wie es beschaffen sey, III. 955
Binomische Wurzel, IV. 1586
Biquadratische Gleichung, wie sie geometrisch zu construiren sey, IV. 1769. 1770
Blätter, wozu sie in der Bau=Kunst gebraucht werden, 354
Blondells Fortification.
Maximen, II. 663. Ausrechnung der Linien und Winkel, 665. Zeichnung, 670. Profil, 672
Boden=Stücke, II. 542. 543
Bock in der Artillerie, II. 551

Register

- Böschung,** II. 609
Bogen, wie er auszurechnen sey, 296. wie daraus der Sinus zu finden, IV. 1875. 1877. wie der Tangens zu finden, 1871
Bogen in Arcaden. Wie er beschaffen sey, 393. 400
Bogen=Schuß, III. 563
Bogen=Stellung. Erklärung, 383. Zeichnung, 408. Einrichtung, 412
Bogen zwischen den Mittel=Puncten, III. 1399. 1403
Böller, II. 564
Hollwercke. Erklärung, II. 613. Figur, 614. 615
Hollwercks=Windel. Erklärung, II. 618. Grösse, 620
Bolzen, II. 550
Bombe, II. 569. 570 571
Bootes, III. 1190
Bouffale, 215. 219
Borten, 342
Brach=Monat, I. 1. 1484
Brand=Röhre in der Bombe, II. 569. Carcasse, II. 575
Brand=Maure, 435
Breite des Glusses, wie sie zu messen sey, 146
des Mondes, wie sie zu finden sey, III. 1369
der Planeten, wie sie observirt wird, III. 1283. 1286. wie sie zu finden sey, 1346. 1347
Breite des Stratus. Erklärung, III. 1183. wie sie zu finden sey, 1184. ob sie veränderlich sey, 1195
des eines Orts. Erklärung, III. 1440. wie sie zu finden sey, 1440
Brenn=Glas, III. 1019. 1020
Brenn=Punct. Erklärung, IV. 1685. wie er zu finden sey in der Parabel, 1685. in der Ellipfi, 1685. in der Hyperbel, 1699. 1700. in den Brenn=Gläsern, III. 1019. 1020. 1021
Brenn=Spiegel, III. 1006. 1007. 1008. 1021
Brille. Zeichnung, II. 672. 680. 681. Profil, 681
Bruch. Erklärung, 76. wie er geschrieben wird, 77. sein Werth, 77. Veränderungen, 78. Rechnung, 79. Logarithmus, 269. 270. wie unendliche zu summiren, IV. 1642. wie sie aus Gleichungen weg zu schaffen, IV. 1738
Brust=Selgen, II. 785
Brust=Lehne 453
Brustwehr, II. 608. 609
Büchsenmeisterey=Kunst, II. 517

Buch

über alle vier Theile.

- Buchstaben-Rechenkunst, IV. 1550
- C.**
- Calenda*, III. 1485
- Calender*, wie er zu machen sey, III. 1513. 1514
- Calibæ*, II. 535
- Caliber=Stab*. Erklärung, II. 535. Zubereitung, 538
- Camera obscura*, III. 959
- Camin*, wie er zu bauen, 481
- Cancer*, III. 1143
- Canonen=Schwefel*, II. 520
- Canun*, III. 1489
- Capella cum bædis*, III. 1191
- Caper*, III. 1143
- Capital*. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. Höhe 360. Auslaufung, 361
- Capital=Linie*, II. 617
- Caponieres*, II. 639
- Carcassen*, II. 575
- Cardinal=Gegenden*, III. 1454
- Carthaune*, II. 532. 533. 553
- Casten*, III. 1491
- Cassiopeja*, II. 1190
- Castelle*, II. 699
- Castor*, III. 1191
- Catalogi fixarum*, III. 1188. 1189
- Catoptrick*, III. 989
- Centaurus*, III. 1190
- Centri-Winkel*, II. 618
- Centrum*, 121
- - *gravitatis*, II. 754
- - *magnitudinis*, *ibid.*
- Cepheus*, III. 1190
- Chaldäischer Scrupel*, III. 1478
- Chamaleon*, III. 1190
- Characteres chronologici*, III. 1493
- Chemin couvert*, II. 637
- Chojac*, III. 1485
- Chorda*, 121
- Chordad mah*, III. 1487
- Christ=Monat*, III. 1484
- Chronologie*, III. 1469
- Circul*. Erklärung, 121. Eigenschaft, 122. 182. 184. IV. 1672. 1830. 1831. Eintheilung, 121. Ausrechnung, 182. 184. Beschreibung, 164. Quadratur, IV. 1853. Rectification, 1870. Subtangens, 1801. wie er ins Perspectiv zu bringen sey, III. 1068
- Circul* der Länge und Breite, III. 1183
- Circul* von höheren Geschlechtern, IV. 1698. 1811
- Circul=Bogen*, 129. 161
- 899 999 4 *Cir-*

Register

- | | |
|--|--|
| <i>Circuli diurni</i> , III. 1133 | <i>Conchois</i> , Erklärung, IV. 1713. |
| <i>Circumvallations</i> Linien, II. 723 | 1713. Gleichung, 1713. |
| <i>Cissois</i> . Erklärung, IV. 1714. | 1714. Asymptote, 1713. |
| Eigenschaft und Gleichung, 1715 | Subtangens, 1823. Wendungspunct, 1907 |
| <i>Citadellen</i> . Erklärung, II. 699. | <i>Conus</i> . Erklärung, 127. |
| Beschaffenheit, 700. | Eigenschaften, 127. II. 846. |
| Zeichnung, 701 | IV. 1675. 1838. |
| <i>Citationes</i> , 25. seq. | Querechnung, IV. 1862. |
| <i>Climata</i> , III. 1450. 1452 | 1878 |
| <i>Coäquirte</i> Anomalie. Erklärung, III. 1314. | <i>Conischer</i> Spiegel. Erklärung, III. 990. |
| wie sie zu finden sey, III. 1322. | wie sie zu machen seyn, 997. |
| 1324 | Eigenschaften, 1000. 1001 |
| <i>Cörper</i> . Wie er perspectivisch gezeichnet sey, II. 1069 | <i>Conjunction</i> , III. 1394 |
| <i>Cörper</i> von leichterer Art, II. 843 | <i>Contra</i> -Minen, II. 640 |
| " " von schwererer Art, II. 844 | <i>Concavallations</i> Linien, II. 723. |
| <i>Cörperlicher</i> Inhalt, wie er zu finden sey, 225 | <i>Contregarde</i> . Erklärung II 633. |
| " " Ort, IV. 1756 | Zeichnung, 662. |
| <i>Colonnata</i> . Erklärung, 393. | Nutzen, 633 |
| Beschaffenheit, 396. 398 | <i>Contrefcarpe</i> . Erklärung, II. 636. |
| <i>Concreten</i> , was man von ihnen observirt, II. 1389. | wie sie zu erobern sey, 735. 737 |
| ihre Natur, 1392. ihr Ort, 1391. | <i>Converso</i> rationum, IV. 1634 |
| und Schweiß, 1392 | <i>Corinthische</i> Ordnung. Erklärung, 358. |
| <i>Commutations</i> Winkel, III. 1344 | Glieder, 377 |
| <i>Compositio</i> rationum, IV. 1633 | <i>Cornea</i> , III. 954 |
| <i>Conchilis</i> , IV. 1713 | <i>Corollaria</i> , 28. 29 |
| | <i>Cortine</i> , II. 615 |
| | <i>Cosinus</i> , 262 |
| | <i>Cosinus</i> , III. 1190 |
| | <i>Crepusculum</i> matutinum, III. 1211 |
| | " " vespertinum, III. 1211 |
| | Creuzs |

über alle vier Theile.

Creuz-Gewölbe, 471. 472	II. 845. IV. 1682. Auß-
Cubatur, IV. 1878	rechnung, 231. 244. 245
Cubic-Maas, 226	Reze, 255
Cubic = Kurve, Schuh,	Cylindrische Spiegel, Er-
Foll, Linie, 227	klärung, III. 950. wie sie
Cubic = Wurzel. Erklä-	zumachen seyn, 997. Eis-
rung, 83. 84. wie sie auß-	enschaften, 999
zuziehen seyn, 91. IV. 1593.	
ihr Logarithmus, 271	D.
Cubic-Zahlen. Ihre Differ-	Dach. Erklärung, 418.
rentien, IV. 1606. 1607.	Höhe, 498. Arten,
ihr Logarithmus, 271	499. 471. Materie, 500
Cubiren, IV. 1878	Dach à la mansarde, 499
Cubische Gleichung, wie	Dampf-Kugel. Erklärung,
daraus die Wurzel zuzie-	II. 577. wie sie zumachen
hen seyn, IV. 1735. wie sie	seyn, 580
geometrisch zuonstruiren	Dauerhaftigkeit des Haus-
seyn, 1769	zeuges, wie sie zubeur-
Cubus. Erklärung, 127. Ei-	theilen seyn, 316
genschaften, 127. wie sein	des Gebäudes, wie sie
Inhalt auszurechnen seyn,	zubeurtheilen seyn, 308
225	David, III. 1191
Curtirte Weite. Erklä-	December, 1484
rung, III. 1339. wie sie	Declination eines Ster-
zufinden seyn, 1342	nes. Erklärung, III. 1152.
Curtirung, III. 1339	wie sie zufinden seyn, 1152.
Crystallene Feuchtigkeit,	ihr Nutzen, 1153. seq.
III. 955	= = der Elliptick, III.
Cyclois. Erklärung, IV.	1154. 1156
1717. Eigenschaften,	Declinirende Uhren, III.
1717. Subtangens, 1825	1527
Cyclus indictionum, III.	Decke, 467. 468
1503	Deckel, 341
- - Luna, III. 1498	Defendirende Linie, II.
- - Solis, III. 1495	602
Cylinder. Erklärung, 126.	
Eigenschaft, 126. 227.	

Register

- Defension**, wie sie einzurichten sey, II. 601
Defens-Linie, II. 602
Definitio, 5
 - - *nominalis & realis*, 6
les Debors, II. 631
Delphin, III. 1190
Delphine in der Artillerie, II. 542
Demonstrationes, 27
Demigorge, II. 617
Demilune, II. 633
Descensional = Differenz, II. 1161
Deutlich, wenn die Sachen gesehen werden, III. 957
Deutlicher Begriff, 7
Diabetes, II. 931
Diagonal, 173
Diameter. Erklärung, 121.
 Verhältniß zur Peripherie des Circuls, 183. 184. 297
Diameter der Planeten, wie er zu finden sey, III. 1377. 1378
 „ „ einer krummen Linie, IV. 1677
 „ „ der Erde, wie er zu messen sey, III. 1435. 1436
Diastylon, 395
Dicksäulig, 395
Dielen, 461. 462
Differentia ascensionalis, III. 1163
Differential = Grösse, IV. 1801. wie sie zu differenziren sey, 1802
Differential = Rechnung, IV. 1799
Differentiiren. Erklärung, IV. 1802. Regeln für die veränderlichen Grössen, 1802. für die Exponential-Grössen, 1894. für die Differential-Grössen, 1900
Differentio = differentiiren, IV. 1900
Differenz, 42
Dignität. Erklärung, IV. 1562. Eigenschaften, 1698. 1611. allgemeine Regel für dieselben, 1602
Di mah, III. 1487
Dioptrick, III. 1014
Directione-Linie, II. 752
 „ „ „ „ der schwehren Körper, II. 759. 760
Directus, III. 1285
Distanz-Punct, III. 1066
Dividendus, 44
Dividiren. Erklärung, 43. 44. Regeln für ganze Zahlen, 64. 65. für gebrochene, 82. für Buchstaben, IV. 1561. für irrational-Zahlen, 1571. wie es ohne das ein mal eins geschieht, 68. Zeichen, 72. IV. 1555
Divisio rationum, IV. 1634
Divisor, 44
Dodecaëdram. Erklärung, 252. Rehe, 253. 254
 Dopp

über alle vier Theile.

Doppelt, wenn etwas gese-	zufinden sey, 1315. 1332.
hen wird, III. 987	ihre Grösse, 1347
Doppelte Ecken = Zierde,	Eccentrische Anomalie,
448	III. 1314
= = Hohlkehle, 347	Eccentrischer Circul, III.
Dorado, III. 1190	1314
Dorische Ordnung. Er-	= = Ort des Planeten,
klärung, 357. Glieder,	III. 1343
367	Ecken = Zierde, wie sie zu-
Drache, III. 1190	zeichnen sey, 447. 448
DrachenzKopf, III. 1353	Ecliptic. Erklärung, III.
Drachen = Monat, III. 1353	1142. 1433, Einthei-
Drachen = Schwanz, III.	lung, 1142. große Des-
ibid.	clination, 1154
Dreyeck. Erklärung, 123.	Egyptisches Jahr, III. 1485
Eigenschaften, 129. wie	Eigene Bewegung, III.
seine Höhe zu finden sey,	1141
IV. 1658. 1059	Einfache Ecken = Zierde,
Dreyvierthel = Carthaune,	447
II. 533. 553. 562	Einfacher Ort, IV. 1756
Drossirung, II. 609	Einfallendes Licht, 438
Druck der flüssigen Cör-	Einfalls = Winkel, III. 951
per, II. 849	Ein mal eins, 57 58. 60.
Druckwerk, II. 920	III. 1192
Dulheggia, III. 1491	Eintheilung des Gebäu-
Dulkaadab, III. 1491	des, wie sie zu finden sey,
Dunkel, warum ein Cör-	477
per ausseheth, III. 976	Einziehung, 432
Dunkler Begriff, 7	Einziehung der Mauern,
Durchmesser, 121	432
Durchmesser des Gebäu-	Elastische Kraft der Luft,
des, 510	II. 882. 883
= = einer Festung, II. 656	Element einer Fläche, IV.
	1843
E.	Elephant, III. 1192
Ebeney Ort, IV. 1756	Ellipsis. Erklärung, IV.
Eccentricität. Erklä-	1689. 1690. Eigenschaft
rung, III. 1312. wie sie	ten, 1690. 1830. 1831.
	1834.

Register

1834. 1856. 1857. 1858.
 Gleichung, 1690. Be-
 schreibung, 1695. Qua-
 dratur, 1856. 1857. Sub-
 tangens, 1812. wie sie
 aus dem Regel geschnitten
 wird, 1711. ist die Bahn
 der Planeten, III. 1310
Ellipses von höheren Ge-
 schlechtern, IV. 1697.
 1698. 1812
Elliptische Aster: Kugel,
 IV. 1881
Elongations: Winkel, III.
 1344
Elul, III. 1489. 1491
Entgegensetzung, III. 1394
Entfernung von dem Ku-
he: Puncte, II. 753
Erde, ihre Figur, 1431.
 1433. Grösse, 1435.
 1436. Bewegung, 1296.
 Ist ein Punct in Ansehung
 der Welt: Kugel, 1147.
 wie groß sie im Monde ge-
 sehen wird, 1385. wie sie
 daselbst ausseheth, 1386.
 ihr ab- und zunehmendes
 Licht, 1385. 1386. wie
 stark sie den Mond er-
 leuchtet, 1379
Erde: Finsterniß, III. 1257
Erde: Kugel, wie sie zuver-
 fertigen sey, III. 1457. ihr
 Gebrauch, 1459
Erdreich, wie seine Beschaf-
 fenheit zu erforschen sey,
 421. wie das lockere zu
 befestigen sey, 422
Erfahrungen, was sie sind,
 18. ihre Beschaffenheit,
 18. 19. wenn man sie an-
 führen muß, 20. 21
Erhabener Spiegel. Er-
 klärung, III. 989. wie er
 zu machen sey, 996. Eigen-
 schaften, IV. 1932
Erhabenes Glas. Erklä-
 rung, III. 1016. Eigen-
 schaft, 1018. 1021. 1025.
 1029
Eridanus, III. 1190
Erkenntniß der Natur, wie
 sie beschaffen sey, III. 1295
Erklärung, 5. 6. wie sie
 bey den Mathematicis be-
 schaffen sey, 8
 = = der Wörter, 6. 8.
 9. 10. 11. 12
 = : der Sachen, 6. 12.
 13
Erleuchtung der Kugel,
 III. 963
Epacta, Erklärung, III.
 1500. wie sie zu finden sey,
 1502. 1503
Epocha, III. 1493
Epiphi, III. 1485
Equuleus, III. 1190
Esphandarmod mah, III.
 1488
Esplanade, III. 637
Europäische Stunden, III.
 1472
 Luz

über alle vier Theile.

- Eurythmie.* Erklärung, 313. Grund, 313. 314.
Gebrauch, 314
Eusylon, 395
Evolute, IV. 1909
Exponens rationis, 73
Exponential-Größen. Erklärung, IV. 1894. wie sie
 zudifferentiiren sey, 1894.
 wie sie integriren sey, 1898
Exponential-Linien, IV. 1895
Exponential-Rechnung, IV. 1894
- S.
- Faces.* Erklärung, II. 615.
Größe, 625
Sackeln der Sonne, III. 1237
Factores, 43
Factum, 43
Säffer, wie sie zuvisiren seyn, 248
Salcaune, II. 533. 553
Salsche Wage, wie sie zuver-
 kennen, II. 766. zugebrau-
 chen, 766. zubeffern sey, 768. 769
Samilie der algebratischen
Linien, IV. 1680
Sarben, wie sie entstehen,
 = des Mondes in Fin-
 sternissen, III. 1250. 1251
Sarbigte Haut, III. 954
- Saschinen,* II. 738
Februarius, III. 1484
Seder, wie dadurch Maschi-
 nen zubewegen seyn, II. 832. 833
Selder=Decke von Holze, 467
 = von Gypse, 469
Seldmessen, 220. 222
Seld=Schangen. Erklärung, II. 701. Grund-
 Riße, 702. 703. 704. 705.
 706. Profil, 701
Senster. Erklärung, 435.
Beschaffenheit, 435. 436.
Höhe und Breite, 436.
 438. 440. 441. wie sie
 über einander zusehen,
 441. zubauen, 442. 453.
 zuzieren, 442. in das Per-
 spectiv zubringen seyn, III.
 1072. wie viel in ein jedes
 Gemach gehören, I. 475.
 476
Senster=Creuz, 436
Sern=Glas. Erklärung, III.
 1031. Erfinder, 1032.
 Röhren dazu, 1033. 1034.
 Gestelle, 1042. wie viel es
 vergrößert, 1046. war-
 um die grossen mehr ver-
 größern, 1047. seq.
Sern=Glas in der Astrono-
mie, III. 1037. 1045. auf
 der Erden, III. 1042. 1043.
 1044
Fervardin mah, III. 1487,
 Seste,

über alle vier Theile.

- Feste, III. 1509
 Fester Körper. Erklärung, II. 843. wie viel er sich eintaucht, 866
 Festigkeit des Gebäudes. Erklärung, 306. wie sie zubeurtheilen sey, 308. wie sie zubeobachten sey, 334. 336
 Festung, wie ihre Vollkommenheit zubeurtheilen sey, II. 597. wie sie abzustechen sey, 714
 Feuer-Ballen, II. 577
 Feuer-Kugeln. Erklärung, II. 576. Arten, 577 wie sie zubinden, 578. und zutauschen seyn, 579
 Feuer-Kugel-Feug, II. 576
 Feuer, wie dadurch Maschinen zubewegen seyn, II. 833. 834
 Feuer-Maure. Erklärung, 502. wie sie nicht raucht, 503
 Feuerwerker-Kunst, II. 517
 Figuren. Eigenschaften, 130. Aehnlichkeit, 194. seq. Grundlegung, 210. Ausrechnung, 173. 187
 Figuren des springenden Wassers, II. 926
 Fische, III. 1142. 1190
 Fisch, der fliegende, III. 1190
 „ „ der südliche, III. 1190
 Fixstern. Erklärung, III. 1143. Bewegung, 1195. Natur, 1387. parallaxis, 1302. 1303
 Fläche der Körper, wie sie sie zu finden sey, IV. 1861. 1862. wie sie perspectivisch zuzeichnen sey, III. 1066. wie ihre Abweichung von Süden, Norden und dem Horizont zu finden sey, 1525
 Flanc, II. 615
 Flanke. Erklärung, II. 615. ihre Lage, 621. Figur, 621. 622. 623. Zahl, 622. 623
 Flecken in der Sonne, III. 1233. 1234. 1235. wie sie zu observiren seyn, 1238
 Flecken in der Venere, III. 1268
 „ „ in dem Jupiter, III. 1268
 „ „ in den Jupiters-Monden, III. 1272
 Fliege, III. 1190
 Fliegender Fisch, III. 1190
 Flüssige Materie. Erklärung, II. 843. ihr wogerechter Stand, 846. 847. ihr Druck, 849. 850
 Flug, II. 564
 Fluß Eridans, III. 1190
 Focus, IV. 1655
 Fomabant, III. 1191
 Fons Heronis, II. 939

For

über alle vier Theile.

Fortification. Erklärung,	wie davon gründlich zu
II. 597. Grund-Regeln,	urtheilen, 306. Unters-
II. 598	scheid, 306. wie seine Ein-
Grieß. Erklärung, 342.	theilung zu finden sey,
Beschaffenheit, 361. Hö-	459. 476. 478
he, 361	Gebrochener Winkel, III.
Fronton. Erklärung, 410.	953
Beschaffenheit, 410. Hö-	Gebälcke, 339
he, 411. Zeichnung, 412.	Gedritt-Schein, III. 1394
413	Gefälle des Wassers, II.
Frühling, III. 1444	809
Fünf-Eck. Erklärung, 125.	Gefäße, III. 1190
wie seine Seite zu finden	Gekuppelte Säulen, 391.
sey, IV. 1653. wie es geo-	392
metrisch zu beschreiben sey,	Gelender-Fenster, 449
1654	Galliläisches Jahr, III.
Fuhrmann, III. 1190	1488
Fundamental-Linie, III.	Gemach, 458
1066	Gemach=Thür, 450
Futter=Mauern bey Fe-	Gemäßigte Striche Lan-
stungen, II. 718	des, III. 1443
Fuß der Säule, 341. des	Gemeine Bewegung, III.
Säulen-Stuhls, 341	1141
Fuß=Gestirne. Erklärung,	Gemeines Jahr, III.
341. wesentliche Glieder,	1482
351. andere Glieder, 352.	Gemini, III. 1143
Höhe, 358. Auslaufung,	Gemma, III. 1190
360. 361	Geographie, III. 1431
Fuß=Mörser, II. 565	Geometrie. Erklärung,
Fuß=Riegel, II. 550	117. ihr Nutzen, 116
	Geometrische Körper, wie
	sie zu machen seyn, 225
	, , Linten, IV. 1677
	, , Werter, IV. 1755
	, , Progression Erklä-
	rung, 74. Eigenschaf-
	ten, IV. 1613. wie sie
	zu

G.

Gallerie, II. 738. 739
 Galliläisches Fern-
 Glas, III. 1033
 Gebäude. Erklärung, 306.

Register

- zusummiren, 1613. 1614
 Geometrische proportio-
 nal-Zahlen, wie sie zu-
 finden seyn, 96. 97. 98. 99
 * = Verhältniß. Erklä-
 rung, 72. Eigenschaften,
 75. IV. 1636
 Gerade Asension. Erklä-
 rung, III. 1159. wie sie zu-
 oberstren sey, 1159.
 1180. 1197. auf der Him-
 mels-Kugel zu finden,
 1160. wie ihr Unter-
 scheid zu finden sey, 1179
 Geradeläufig, III. 1285
 Geradelinichte Figur, wie
 sie in Grund zu legen, 210.
 auszurechnen, 179. 180.
 zutheilen sey, 192
 Geradelinichter Transpor-
 teur, wie er zuverfertigen,
 298. 299 und zugebrau-
 chen sey, 299. 300
 Gerade Linie. Erklärung,
 119. wie sie beschrieben
 und gemessen wird, 120.
 134. 135. ihre Eigen-
 schaften, 129. 131. und
 und Theilung, 160. 168.
 199
 Gerade Zahlen, ihre Ei-
 genschaften, IV. 1608.
 1609. 1610
 Gesichts = Schein, III.
 1394
 Gesellschafts = Rechnung,
 104. 105
 Geschlecht der algebräischen
 Linien, IV. 1679
 Geschliffene Gläser, ihre
 Eigenschaften, III. 1017.
 & sqq. IV. 1929
 Geschütz-Kunst, II. 517
 Geschwindigkeit, IV.
 1914
 Gesichts = Linien, II. 614
 Gesimse, 354
 Gesimse, zu Fenstern und
 Thüren, 443
 Gestelle zu Fern-Gläsern,
 III. 1042
 Gestirne, 1190. 1191.
 1192
 Gesundes Auge, wie es be-
 schaffen sey, III. 953
 Getrieb, II. 751
 Geviert = Schein, III.
 1394
 Gewicht, wie damit Ma-
 schinen zu bewegen, II. 830.
 831. und Kräfte zuver-
 stärken seyn, 832. Un-
 terscheid in den berühmten
 Städten, 541
 Gewölbe. Erklärung, 471.
 wie es aufzurichten sey,
 373. Wiederlage, 473. 474
 Giebel-Feld, 411
 Giebel-Dinne, 513
 Gieß-Saß, II. 928. 929
 Ginbat, III. 1486
 Glacis, II. 637
 Gläserne Feuchtigkeit, II.
 954
 Glas-

über alle vier Theile.

Glas, wie man es schleift, I. 1062. 1064. welches zum schleifen gut ist, 1058. 1060
Glas mit Wasser macht helle, III. 1056
Gleichheit der Winkel, 129
Gleichschendlichter Triangel. Erklärung, 124. Eigenschaften, 155. 156. Beschreibung, 139. seq.
Gleichseitige Hyperbel. Erklärung, IV. 1709. Nutzen, 1893
Gleichseitiger Triangel. Erklärung, 123. Beschreibung, 140. Eigenschaft, 156
Gleichung, IV. 1571
Glieder in der Baukunst. Erklärung, 343. Regeln ihrer Zusammensetzung, 347. Proportion, 358
Glühende Kugel, wie sie in ein Stück zuladen sey, II. 558. ihr Gebrauch, 558
Gnomonick, III. 1523
Grab Christi, III. 1191
Graben, seine Nothwendigkeit, II. 607. Beschaffenheit, 529. 530. Breite, 628 wie sie zu finden sey, 710
Grad, 122
Grenzen, II. 1367
Granaten, II. 575
(Wolfs Mathes. Tom. IV.)
Gregorianischer Calendar, III. 1515
Gregorianisches Jahr, III. 1483
Gregorianische Monate, III. 1484
Größe. Erklärung, IV. 1550. 1551. Veränderungen, 1552. Zeichen, 1553. wie sie gesehen wird, III. 956. 977. 978
Größe der Bewegung, IV. 1914
Größtes, IV. 1828. 1829
Größte Circul einer Kugel. Erklärung, III. 1083. Eigenschaften, 1084. 1085. 1086. 1097. 1098. 1107. 1119
Größte Conjunction, III. 1395
Große Conjunction, III. 1395
Großer Radius, II. 617
Gründe der Rechenkunst, welche willführlich seyn, 46. 77
Grund des Gebäudes. Erklärung, 418. Stärke, 418. Bau, 418
Grundbau des Gebäudes, 419
des Walles, II. 715. 716. in dem Wasser, 429. 430
Grundgraben, 425
Grundlegung der Signaturen, 210
Hbb hbb Grund

Register

- Grund=Linie der Perspec-
 tiv, III. 1066
 Grund=Mauere, 424. 425
 426. 427
 Grund=Regeln der Fortifi-
 cation, II. 598
 Grund=Riß eines Gebäu-
 des. Erklärung, 507. 508.
 wie er zumachen sey, 508
 // einer Festung, III. 651
 Grund=Säge, 16
 Guldene Zahl. Erklärung,
 III. 1499. wie sie zu finden
 sey, 1500. 1502
 Gyps=Decke, 469
- H.
- Haar der Berenices, III.
 1190
 Haase, III. 1190
 Halb=Caponieres, II. 639
 Halbe Carthaune, II. 533.
 553. 562
 Halbe Feld=Schlange, II.
 533. 553. 562
 Halbe Redoute, II. 706
 Halber Mond. Erklärung,
 II. 633. Nutzen, 633.
 Zeichnung, 653. 679
 Halb=Messer, 121
 Halb=Schatten, III. 1408
 Halbes Falconet, II. 533.
 553. 562
 Hamle, III. 1486
 Hand = Faß mit einem
 Spring=Brunnen, II. 925
 Hand=Granaten, II. 575
- Hand=Mühlen, II. 828.
 829
 Hangende Mörtel, II. 565
 Harmonische Propor-
 tion, IV. 1644
 Harte Haut, III. 954
 Haubitz, II. 581
 Haupt = Gegenden der
 Welt, III. 1133. 1454
 Haupt = Gesimse. Erklä-
 rung, 340. Höhe, 359. 364
 Haupt=Linie, II. 617
 Haupt=Kriegel, II. 550
 Haus=Thüre, 450. 451
 Haziram, III. 1489
 Hebel. Erklärung, II. 748.
 Eigenschaft, 761. Nutzen,
 749
 Heber, II. 930. 931. 933
 Heilige drey Könige, III.
 1510
 Heimliches Gemach, 480.
 481
 Heliocentrischer Ort, III.
 1343
 Herbst, III. 1444. 1445
 Herbst=Monat, III. 1484
 Hercules, III. 1191
 Herd, 491. 492
 Herons=Brunnen, II. 939
 Herz des Löwen, III.
 1191
 // Scorpions, III. 1191
 Hesperus, III. 1267
 Heu=Monat, III. 1484
 Hexaëdram, 252
 Himmels=Kugel, III. 1128
 Hesperus

über alle vier Theile.

- Hexagonal-Zahl, IV. 1623
 Hingige Striche Landes, III. 1443
 Höhen, wie sie zumessen
 seyn, 208. 292. III. 967.
 979. wie weit man davon
 sehen kan, III. 1439
 Höhe des Gemachs, wie sie
 zu finden seyn, 460
 = des neunzigsten, wie
 sie zu finden seyn, III. 1220.
 1218
 = der Sonne, wie sie zu
 finden seyn, III. 1171. 1175
 = des springenden
 Wassers, II. 924
 = des Sternes. Er-
 klärung, III. 1146. wie sie
 zumessen seyn, 1147
 = des Triangels, wie sie
 zu finden seyn, IV. 1659.
 1661
 Hohe Ordnung, 361
 Hohles Glas. Erklärung,
 III. 1017. Eigenschaften,
 1027. 1030. IV. 1933
 Hohl-Röhle. Erklärung,
 343. Zeichnung, 345.
 Grösse, 359
 Hohl-Leisten, 344
 Hohl-Spiegel. Erklärung,
 III. 989. wie er zumachen
 seyn, 1001. Eigenschaft,
 1005. IV. 1933
 Holländische Fortifica-
 tion. Maximen, II. 641.
 Ausrechnung der Winkel
 und Linien, 642. 643.
 Grundriß, 651. Profil,
 656. was davon zuhal-
 ten seyn, 657
 Holländisches Fern-Glas,
 III. 1033
 Holz. Eigenschaften, 315.
 warum es in Gebäuden,
 so viel möglich, zuvermei-
 den seyn, 316
 Horizont, III. 1131
 Horizontal-Linie, II. 754
 III. 1066
 Horizontal-Uhr. Erklä-
 rung, III. 1527. Zeich-
 nung, 1530
 Horn-Haut, III. 954
 Hornung, III. 1484
 Horn-Werck. Erklärung,
 II. 635. Zeichnung, 655
Hamor aqueus, III. 955
 - - *crystallinus*, III. 954.
 Eigenschaften, 955. 957
 - *vitreus*, 954
 Hund, der groffe und kleine,
 III. 1190
Hyades, III. 1191
Hydar, III. 1486
Hydra, III. 1190
 Hydraulick, II. 911
 Hydrostatick, II. 843
Hydrus, III. 1190
 Hyperbel. Erklärung, IV.
 1698. 1699. Beschrei-
 bung, 1700. Asymptoten,
 1704. Eigenschaften zwis-
 schen den Asymptoten,
 1705.

Register

1705. 1706. Quadratur, 2341.
 1852. Subtangens, 1813.
 1814. wie sie aus dem Re-
 gel geschnitten wird, 1712
 Hyperbeln von höhern
 Geschlechtern, IV. 1709.
 1713
 Hyperbolischer Aster-Re-
 gel, IV. 1882
 Hypothesis, 22
- J.
- Facatit*, III. 1486
 Jährliche Epacten, III. 1501
 Jagd-Hunde, III. 1192
 Jahre der Gnaden, III.
 1507
 Jahres-Anfang, III. 1485
 Jahr-Termin. Erklärung,
 III. 1493. verschiedene
 Arten, 1506. 1507
 Jahr-Zahlen, wie sie mit
 einander zuvergleichen
 seyn, III. 1508
 Jahr-Zahl der Märtyrer,
 III. 1506
Januarius, III. 1484
Icosædram. Erklärung, 252,
 Rehe, 254
Idus, III. 1484. 1485
 Jenner, III. 1484
Jiar, III. 1491
 Immerwährender Calen-
 der, III. 1515
 Inclination. Erklärung,
 III. 1338. wie die größte
- zuobersiren seyn, 2341.
 wie die übrigen auszu-
 rechnen seyn, 1341
 Inclination der monatli-
 chen Grenze, III. 1367.
 1368
 Inclinations = Winkel,
 II. 953
 Inclinierte Uhren, III. 1528
 Indianer, III. 1190
 Indianische Biene, III.
 1190
 Innere Polygon, II. 617
 Instrument, die Mittags-
 Linie zu finden, III. 1136.
 die Soole abzumägen,
 867
 Inseln in dem Monde,
 III. 1256
 Integral = Rechnung. Er-
 klärung, IV. 1840. Re-
 geln, 1841
 Integriren, IV. 1840
Intercolumnium, 393
Intervallum, III. 1313
Inversio rationum, IV. 1633
 Inwohner der Planeten,
 III. 1279
Jomada, III. 1491
 Ionische Ordnung, Er-
 klärung, 357. Glieder,
 372. 373
 Irrational = GröÙe, IV.
 1565
 Irrational = Zahlen. Er-
 klärung, V. 1566. ihre
 Rechnung, 1566. 1567.
 wie

über alle vier Theile.

- wie sie aus der Gleichung
 abzuschaffen seyn, 1729
 Irreguläre Körper, 128
 Irreguläre Figur. Erklä-
 rung, 128. Eigenschaft,
 165. Beschreibung, 168.
 Ausrechnung, 180
 = = Festung, II. 687
 = = Platz, wie er zur Re-
 gularität zubringen sey,
 II. 688. 689. wie er zupor-
 tificiren sey, 689
 Italiänische Stunden, III.
 1472
 Juden-Jahr, III. 1491
 Jüdische Stunden, III.
 1472
 Jüdisches Sonnen-Jahr,
 III. 1492
 Julianischer *Periodus*, III.
 1504. sein Nutzen, 1504.
 1505
 Julianisches Jahr, III.
 1482
 Julianische Monate, III.
 1484
Julius, III. 1484
 Jungfrau, III. 1142. 1190
Junius, III. 1484
 Jupiter, III. 1141. seine
 Flecken, 1272. Streifen,
 1268. Bewegung um die
 Aere, 1269. und um die
 Sonne, 1283. Ähnlich-
 keit mit dem Monde, 1277
 Jupiters-Monden, III.
 1270. ihre Bewegung,
 1271. Weite von dem Ju-
 piter, 1271. Finsternisse,
 1271. 1272. Flecken, 1272
 Jupiters-Trabanten, III.
 1270
 K.
 Kälber-Zähne, 354. wie
 sie zuzeichnen seyn, 387.
 wo sie nicht zugebrauchen
 seyn, 410
 Kämpfer. Erklärung, 402.
 Glieder, 402
 Kalck, von was vor Steinen
 er zubrennen sey, 330.
 331. Proben, 332. Ver-
 wahrung, 332. 333
 Kalte Striche Landes,
 III. 1443. 1444
 Kammen, wie sie einzuthe-
 len seyn, II. 787. ihre bes-
 te Figur, 788
 Kammer, wie sie beschaffen
 seyn soll, 461. 462. 465.
 466
 Kammer in dem Mörtel, II.
 564. in der Mine, II. 586
 Kamm-Rad. Erklärung, II.
 751. wie es zumachen sey,
 785
 Kammer-Stücke, II. 582
 Kap-Fenster, 501
 Karnieß. Erklärung, 342.
 wesentliche Glieder, 351.
 andere Glieder, 352. 353.
 Höhe, 360. Auslaufung,
 361
 Kartetschen, II. 559
 Kegel. Erklärung, 127. Ei-
 genschaften, 233. 234.
 h h h h h 3 Aus;

Register

- Ausrechnung, 236. 244
 Kegel-Schnitte, IV. 1681
 Koble, II. 617
 Kobl-Leisten, 344
 Kobl-Linie. Erklärung, I.
 617. ihre Größe, 626
 Keil, sein Vermögen, II.
 800. Nutzen in der Artillerie,
 561
 Kern-Schuß, II. 563
 Kessel, II. 564
 Kirch Thüre, 451
 Klappen zu Plumpen, II.
 920
 Klarer Begriff, 7
 Kleine Axe in der Ellipsis,
 II. 1693
 „ „ Defens-Linie, II. 616
 Kleiner Radius, II. 617
 Kleiner Winkel, II. 618
 ein Kleinstes, IV. 1828
 Kloben. Erklärung, II. 751.
 ihr Vermögen, 798. 799
 Knall-Pulver, II. 528
 Knauf, 341
 Knoten. Erklärung, III.
 1337. wie sie zu observiren
 seyn, 1339. ihre Bewer-
 gung, 1340. 1353
 Kohlen zu Pulver, wie sie
 zubrennen seyn, I. 521.
 522. ihre Eigenschaften,
 524
 Kraft, II. 746
 Kraft, etwas unter dem
 Wasser zu erhalten, II. 869
 Krag-Steine. Erklärung,
 354. Gebrauch, 335.
 Zeichnung, 336. wo sie
 nicht zu brauchen seyn, 410
 Kranich, III. 1190
 Krang, 342
 Krang-Leisten, 344
 Kron-Werck. Erklärung,
 II. 635. Zeichnung, 635
 Krebs, III. 1142. 1190
 Kriegs-Kunst, II. 597
 Kripplein Christi, III.
 1191
 Krone, III. 1190
 Kropf-Feigen, II. 783
 Krumme Linie, 119
 Küssen-Riegel, II. 550
 Kütt, wie er zu machen sey,
 466. II. 571. welcher zu
 dem Glas-Schleifen dien-
 lich sey, III. 1063
 Kugel. Erklärung, 126. Ei-
 genschaften, 126. 238.
 240. 241. 242. IV. 1674.
 Ausrechnung, I. 242. 243.
 IV. 1879. Erleuchtung,
 III. 963. wie das Licht dar-
 innen gebrochen wird, III.
 1019. wie einer pfündigen
 Diameter gefunden wird,
 II. 538. wie ihre Gewichte
 zu vergleichen seyn, 806.
 wie sie zuprobiren seyn,
 556
 Kugel-Circul, III. 1085
 Kugel-Lehre, II. 556
 Kugel-Säcke, wie sie zu ma-
 chen seyn, 577. 578
 Lader

über alle vier Theile.

L	L.	Lehrsatz. Erklärung, 21. 22.
Ladeschaufel, II. 552, 554		was dabey zu bedenken
Ladung in den Mörser, II.		sey, 22. seine Theile, 22.
572. in die Stücken, II.		23. 24
	552	<i>Lens concava</i> , III. 1017
Länge eines Orts, III. 1441		- - <i>convexa</i> , III. 1016
Länge eines Planeten, wie		<i>Leo</i> , III. 1143
sie zu observiren, III. 1283.		Leucht = Kugeln. Erklär-
zurechnen sey, 1343		rung, II. 577. wie sie zu-
= eines Sternes. Er-		machen seyn, II. 580
klärung, III. 1194. wie sie		<i>Leyer</i> , III. 1190
zufinden sey, 1184. wie sie		<i>Libra</i> , III. 1143
zunimt, 1195. auf jede		Licht. Erklärung, III. 949.
Zeit auszurechnen, 1196		Eigenschaften, III. 949.
= des Tages, wie sie zu-		950. 951. 952. 953. 961.
finden sey, III. 1166		962. 963. warum es von
Länglichte Raute, 124		weiten so groß ausseheth,
Länglichtes Viereck, ibid.		980. wie es geschwächt,
Längster Tag, wie seine		1028. verstärkt, 1008.
Größe zu finden sey, III.		und gebrochen wird, 1014
	1451	Licht des Mondes, wie es
Laffeten. Erklärung, 542.		ab; und zunimt, III. 1245.
Zeichnung, 548		1246
Laffeten der Mörser, wie		= des Mercurii, wie es
sie zu zeichnen seyn, II. 567.		ab; und zunimt, 1266
	568	= der Veneris, wie es
Lager in dem Mörser, II.		ab; und zunimt, 1265
	564	<i>Ligne de defense fichante</i> , II.
Landkarten zumachen,		616
	III. 1461	- - <i>flanquante</i> , II. 616
Last, II. 746		<i>Linea absidum</i> , III. 1312
Lauf in dem Geschütz, II. 545		- - <i>directionis</i> , II. 753
in dem Mörser, II. 564		Linie in dem Maasse, 119
Lebendige Kraft, II. 746		= in der Geometrie, 117
Lebendiger Schwefel, II.		= Geographie, III. 1431
	520	Linien an der Festung, wie
Lederne Stücke, II. 535		sie einander flanquiren, II.
Leer-Bogen, 473		619
		<i>Lo-</i>

Register

- Locus planus*, IV. 1756
- - solidus, IV. 1756
Löwe, III. 1142. 1190
z *der kleine*, III. 1192
Logarithmische Größen,
 wie sie zu differenziren, IV.
 1890. zu integriren seyn,
 1801
Logarithmische Linie. Er-
 klärung, IV. 1716. Eigen-
 schaften, 1889. Quadra-
 tur, 1858. Subtangens,
 1776. Nutzen, 1890. Eör-
 per, welcher daraus erzeu-
 get wird, 1883
Logarithmus. Erklärung 269
 Erfinder, 268. Eigen-
 schaften, 269 270. 271. Aus-
 rechnung, 272. & sqq. IV.
 1891. wie daraus die Zahl
 zu finden seyn, 1891. wie
 großer Zahlen Logarithmi
 zu finden seyn, 1 278. diffe-
 rential-Größe davon, IV.
 1890
Luchs, III. 1192
Lucifer, III. 1267
Luft. Erklärung, II. 878.
 Eigenschaften, 882. 895.
 schwächet das Licht, III.
 963. wie man sie zusam-
 mendrückt, II. 894. 895
Luft um den Mond, III.
 1257. 1258
Luft-Pumpe, II. 879
 III.
Maaß der Linien, 119
Maaß des Winkels,
 122. 157
Maaß des sphärischen
Winkels, 1084
Maaß-Stab, die Ordnun-
 gen zuzeichnen, 281
Macedonisches Jahr, III.
 1490
Maschine. Erklärung, II.
 747. wie sie auf allerhand
 Art zubewegen seyn, 824
Magabit, III. 1486
Mahler-Kunst, ihr Grund,
 III. 977
Majaxia, III. 1486
Majus, III. 1484
Marchesvan, III. 1491
Mars, III. 1141. wie er durch
 Fern- & Gläser observirt
 wird, 1268. seine Streifen,
 1268. Bewegung um die
 Aere, 1269. Aehnlichkeit
 mit dem Monde, 1277. ei-
 gene Bewegung, 1284
Martius, III. 1484
Mascaam, III. 1486
Materie, IV. 1914
Mathematick, ihr Nutzen,
 30. 31
Mathematische Lehr-Art.
 Erklärung 5. wie weit sie
 sicherstreckt, 30. ihr Nu-
 zen, 30
Maure. Erklärung, 418.
 Beschaffenheit, 431. 432.
 Bau und verschiedene Ars-
 ten, 433. 434. 455. 456
Maximen zuerfinden, wo
 sie anzutreffen seyn, 37. 38
May, III. 1484
Mechan

über alle vier Theile.

Mechanick,	II. 745	brauch,	201
Mechanisch philosophi-		Metall, woraus es gemacht	
ren,	II. 748	wird, II. 534. Verhältniß	
Mechir,	III. 1485	der Schwehre, II. 862	
Media & extrema ratione se-		Methodus de maximis & mi-	
care,	IV. 1655. 1656	nimis, IV. 1828	
Meere in dem Monde, III.		- - tangentium inversa,	
	1255	IV. 1885	
Meer-Sand, wie er in dem		Mechaninen,	438
Bauen zugebrauchen sey,		Milch-Strasse, III. 1192.	
	329		1193
Meher mah,	III. 1487	Micrometrum, III. 1260.	
Mehr,	IV. 1554		1261. 1262
Menschen in dem Monde,		Minen. Erklärung, II. 585.	
	III. 1260	Beschaffenheit, 586. 587.	
= = in den Planeten, III.		wie sie anzulegen seyn, 590	
	1279	Minute, 117. III. 1471	
Mensis anomalisticus, III.		Mira, III. 1388	
	1354	Mittag, III. 1133. 1138	
Draconticus, III. 1353		Mittags-Circul, III. 1434	
Mercurius, III. 1141. wie er		Mittags-Höhe. Erklärung,	
durch Fern-Gläser obser-		III. 1146. wie sie zu messen	
virt wird, 1263. 1264. Be-		1148. und auszurechnen	
wegung um die Sonne,		seyn, 1158. Ruhen, 1157	
1266. 1285. Parallaxis,		Mittags-Linie. Erklärung,	
1281. Aehnlichkeit mit		III. 1132. wie sie zu finden	
dem Monde, 1277. 1278		seyn, 1134	
Mercurius in Sole, III. 1264		Mittags-Uhren. Erklä-	
Meridianus. Erklärung, III.		III. 1527. Zeichnung, 1533	
1130. 1145. 1434. wie der		Mittel-Punct des Circuls,	
Unterscheid der Meridia-		Erklärung, 121. wie er zu	
norum zu finden sey, 1249		finden sey, 165. 224	
Mern,	III. 1484	= = der Hyperbel, IV. 1699	
Mesori,	III. 1485	= = der Grösse, II. 576. 762	
Messen,	II. 877	= = der Schwehre. Erklä-	
Mess-Kette, 136		rung, II. 754. wie er zu fin-	
Mess-Schnur, 136		den sey, 756	
Mess-Tischlein, sein Ge-		Mitternacht, III. 1138	
		h h h h h 5	Mitt

Register

- Mitternachts-Uhr.** Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1533
Mittlere Anomalie. Erklärung III 1313. ihr Maaß, 1313. wie sie zu finden sey, 1320
 = = Bewegung, III. 1313
 = = Theil eines sphärischen Triangels, III. 1087
Mittlere Zeit, III. 1417
Modul. Erklärung, 359. Eintheilung 359. wie er zu finden sey, 363. für die oberen Seulen zu verjüngten, 415. 416
Mörser. Erklärung, II. 564. Materie, 564 Theile, 564. Zeichnung, 566. Richtung, 572. Ladung, 572. wie weit er trägt, 574
Mörser zu Granaten, II. 575
Mörtel, wie er zubereitet wird, 430
Mohren-Jahr, III. 1486
Monatliche Aequation, III. 1361
 = = Breite, III. 1369
 = = Eccentricität, III. 1357
 = = Epacten, III. 1500
Monatliches Argument der Breite, III. 1367
 = = der Länge, III. 1358. 1359
Monatliche Scrupel der Länge, III 1358. 1359
Mond, wie er durch Fern- Gläser erscheint, III. 1252. Natur und Beschaffenheit, 1254. 1255. Ähnlichkeit mit der Erde, III. 1259. Bewegung um die Erde, 1349. 1286. Bewegung seiner Knoten, 1353. wie seine Berge zu messen seyn, 1383. Charte darüber, 1384. seine Größe, 1378. und Weite von der Erde, 1370
Mond-Charten, III. 1384
Mond-Circul, III. 1499. Größe, 1498
Monden-Jahr, III. 1481
Monden-Monat, III 1480
Mond-Epacten, III. 1500
Mond-Finsterniß. Erklärung, III. 1248. Ursachen, 1247. 1248. Umstände, 1247. 1248. 1249. 1396. Ausrechnung 1397. wie sie zu observiren sey, 1407
Mordad mah, III. 1487
Morgen, III. 1133. wie diese Gegend zu finden sey, 1138
Morgen-Röthe, wie lange sie währet, 1216
Morgen-Stern, III. 1267
Morgen-Uhren, III. 1527. Zeichnung, 1535
Motus latitudinis, III. 1354
 - - *librationis,* III. 1269
 - - *reflexionis,* III. 1301
Muhammedisches Jahr, III. 1490
Muharam, III. 1491
Mula

über alle vier Theile.

Mulden-Gewölbe, 472	Netzförmiges Häutlein, III. 954
Multiplication. Erklärung, 42. Regeln für ganze Zahlen, 59. für Brüche, 80. für Buchstaben, IV. 1560. für irrational-Zahlen, IV. 1570. Zeichen, 1554	Neu-Mond, III. 1246
Mund-Stücke, II. 542. 543	Niedrige Ordnungen, 362
Muschel-Linie, IV. 1713	Nisan, III. 1491. 1492
Musteraka, IV. 1488	Nodi. Erklärung, III. 1337. Bewegung, 1340. Ort, 1339. wie sie zu beobachten seyn, 1339
Nabe, II. 551	Nodus <i>ascendens</i> , III. 1338
Nabonassersches Jahr, III. 1485. wie sein Anfang zu finden sey, III. 1486	- - <i>australis</i> , <i>ibid.</i>
Nacht, III. 1469	- - <i>borealis</i> , <i>ibid.</i>
Nachts-Länge, wie sie zu finden sey, III. 1169	- - <i>descendens</i> , <i>ibid.</i>
Nadir, III. 1130	Nonæ, III. 1484. 1485
Nabafe, III. 1486	Norden, III. 1454
Nabe-säulig, 395	Nordische Krone, III. 1190
Nahme der Verhältniß, 73	Nord-Pol, III. 1128. 1433
Nahmen der Zahlen, 47	Normal-Linie, IV. 1809
Natürlicher Tag, III. 1469	November, III. 1484
Nebelichte Sterne, III. 1193	Numerus polygonus, IV. 1623
Neben = Gegenden, III. 1454	O.
Neben-Pfeiler, 402	Ober-Saum, 344
Neben-Striche, II. 616	Oberschlächtiges Wasser-Rad. Erklärung, 800. wie es zu theilen sey, 816. wie das Wasser darauf zu leiten sey, 813. wo es zuges brauchen sey, 812
Neben-Winkel, 133. III. 1086	Objectiv-Glas, III. 1033
Neigungs = Winkel, III. 953	Obliquitas <i>ecliptica</i> , III. 1155
Nenner eines Bruchs, 77	Oblongum, 124
	Occasus <i>acronyctus</i> , III. 1207
	- - <i>cosmicus</i> , III. 1207
	- - <i>heliacus</i> , III. 1209
	Ochsen-Auge, III. 955
	Octaedrum, 252
	Ostante, III. 1117
	Oste-

Register

- Oktober*, III. 1484
Oefen, wie sie zuverbessern seyn, 488. wie mit einem zwey Zimmer zuheizen seyn, 489
Ohren=Gewölbe, 472
Olympias, III. 1108
Ophiuchus, III. 1190
Opriß, Erklärung, III. 949.
Rugen, III. 946
Opus rusticum, 456
Opposition, III. 1394
Ordentliche Figur, 125
Ordentlich e Körper, 128
Ordinate, IV. 1678. ihre Verhältniß in der Parabel, 1686. und Ellipti, 1694
Ordnung. Erklärung, 338. Ursprung, 337. 355. Theile, 350. 351. Zahl, 356. wie von ihnen zuurtheilen sey, 338. 339. wie sie zuurfinden, 354. und zuzeichnen sey, 384. 385
Orión, II. 622
Orion, III. 1190
Ort an dem Circul. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1765
= an der Ellipsi. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1762
= an einer geraden Linie. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1756
Ort an der Hyperbel. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1765
Ort zwischen den Asymptoten, IV. 1767
= an einer Parabel. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1757
= der Sonne, wie er zuobserviren sey, III. 1158
= des Bildes in dem Spiegel, III. 1005. 1011. IV. 1922
Ort, wo jede Sache gesehen wird, III. 993
Ortus acronyctus, III. 1207
- - cosmicus, ibid.
- - heliacus, III. 1209
Ost, III. 1454
Ostern=Fest, wenn es zu feiern sey, III. 1510. wie es auszurechnen sey, III. 1511
Ouvrage a Cornes, II. 635
- - couronné, II. 635

P.

Pachon, III. 1485
Pagans Fortification. Maximen, II. 658. Rechnung der Winkel und Linien, 659. Zeichnung, 660
Pagomen, III. 1486
Palatium, III. 1191
Pallisaden, II. 638
Panster=Zeug, II. 817
Paophi, III. 1485
Parabola. Erklärung, IV. 1681. 1682. Eigenschaft, Beschreibung, 1683. 1689 1757.

über alle vier Theile.

1757. 1886. 1912. Qua-
 dratur, 1844. Rectifica-
 tion, 1865. Subtangens,
 1810. wie sie aus dem Kes-
 gel geschnitten wird, 1710
 Parabeln von höherem
 Geschlechte. Erklärung,
 IV. 1679. Beschreibung,
 1684. 1685. Eigenschaf-
 ten, 1689. Subtangens,
 1808. Quadratur, 1845.
 Rectification, 1868
 Parabolischer Astre=Kes-
 gel, IV. 1862. 1880
 Parallaxis Erklärung, 1224.
 Eigenschaften, 1224.
 1225. 1226
 Parallaxis der Erds-Bahn.
 Erklärung, III. 1344. wie
 sie zu finden sey, 1345
 = = der Six=Sterne, III.
 1302. 1303
 - - Martis, III. 1373
 - - Mercurii, III. 1235
 = = der Sonne, III. 1373
 Parallel=Circul, III. 1373
 Parallelepipedum. Erklä-
 rung, 127. Eigenschaften,
 127. 227. 229. 244. IV.
 1836. 1837. Ausrech-
 nung, 229. 230. Nehe,
 254
 Parallel=Linten. Erklä-
 rung, 125. Beschreibung,
 147. Absteckung auf dem
 Felde, 153. Eigenschaf-
 ten, 151. 152. 155
 Parallel=Lineal, Structur
 und Gebrauch, 147. 148
 Parallelogramma. Erklä-
 rung, 126. Eigenschaften,
 176. 189. 190. Theilung,
 190. 222
 Parameter, IV. 1682.
 1690. 1698
 Partial=Finsterniß. Erklä-
 rung, III. 1482. wie ihre
 Größe zu finden sey 1402
 Particula exfors, III. 1360.
 1361
 Paternoster=Werd. II. 913
 Panni, III. 1485
 Pegasus, III. 1190
 Pentagonal=Zahl, IV. 1623
 Perigäum, III. 1312
 Perihelium, ibid.
 Periodischer Monat, III.
 1350
 Periodus Juliana, III. 1304
 Perpendicul an Uhr=Wer-
 cken, II. 837. 838
 Perpendicular=Linie. Er-
 klärung, 123. Beschrei-
 bung, 148. 149. 159
 Perser=Jahr, III. 1487
 Perseus, III. 1190
 Perspectiv, III. 1065
 Perspectivische Kiste, 510
 Petarde, II. 582. 583
 Petrus, III. 1191
 Pfähle, wie sie zum Grunds-
 Baue beschaffen seyn sol-
 len, 422. 423. was bey
 dem Einrammen in acht
 zu

Register

- zunehmen sey, 423
 pfau, III. 1190
 pf. il, ibid.
 Pfeiler, 334. wie sie in das
 Perspectiv zubringen seyn,
 III. 1070
 Pflaster, was für Figuren
 der Steine sich dazu schi-
 cken, 462
 Pflaster=Ziegel, 462
 pfuhl, 344
 Phämenoth, III. 1435
 Pharmuthi, ibid.
 Phœnix, III. 1190
 Phosphorus, III. 1267
 Pilaster, 334
 Pisces, III. 1143
 Places d' armes, II. 681
 Plagæ, III. 1454
 Planet. Erklärung, III.
 1143. Bewegung durch
 den Thier=Kreis, 1285.
 1286. 1328. wie die Eccen-
 tricität nebst dem Aphelio
 gefunden wird, 1332. wie
 ihre Grösse zu finden sey,
 1379. Inwohner, 1279.
 ihre Natur, 1277. 1278.
 Verdeckungen unter ein-
 ander, 1280. scheinbare
 Diameter, 1280. 1282.
 Weite von der Sonne,
 1321. und von der Erde,
 1376. 1345. 1281. war:
 um sie stille stehen und zu-
 rück gehen, 1298. 1299
 Planeten = Stunden, III.
 1472
 Platten. Erklärung, 343.
 Grösse, 359
 Platter Spiegel. Erklä-
 rung, III. 989. wie er zu-
 machen sey, 990. 991.
 Eigenschaften, IV. 1923
 Plättlein. Erklärung, 343.
 Grösse, 359
 Plejades, III. 1191
 Plumpe, II. 917. 918. 919
 Plump=Stoß, II. 918
 Polar=Circul, III. 1145
 Polar=Uhren. Erklärung,
 III. 1527. Zeichnung, 1536
 Pol der Kugel, III. 1085
 Pole der Elliptick, III.
 1155
 Pol=Höhe, wie sie zu finden
 sey, III. 1149. 1154. 1158
 Pollux, III. 1191
 Polus antarcticus, III. 1128
 - - arcticus, ibid.
 Polygonal=Zahl. Erklä-
 rung, IV. 1623. wie sie zu-
 finden sey, 1625
 Polygone, 125
 Polygon=Winckel, 165
 Polyhedrische Gläser, III.
 1058
 Polynomische Wurzel,
 IV. 1586
 Polyoptrische Gläser, III.
 1058
 Postement. Erklärung, 339
 Beschaffenheit, 353. 405.
 Höhe, 360. Eintheilung,
 363. Gebrauch, 340. 341
 Posten

über alle vier Theile.

- Postement: Gesims. Er-
 klärung, 341. wesentliche
 Glieder, 351. andere Glie-
 der, 351. 352. Höhe, 360.
 Auslaufung, 361
Postulata, 17
 Potagen = Herd, wie er zu-
 bauen sey, 492
 Potenz. Erklärung, IV.
 1562. Grade, 1563. Zei-
 chen, 1563. Rechnung,
 1563. 1564
Præsepe, III. 1191
Prisma. Erklärung, 126.
 Eigenschaft, 126. 227.
 228. 244. Ausrechnung,
 230. Rehe, 255
 Profil, II 656. Zeichnung,
 656. 657. wie sein super-
 ficial Inhalt: zu finden sey,
 707. wie der körperliche
 zu finden sey, 711
Progressio arithmetica, 74.
 Eigenschaften, IV. 1613
 - - *geometrica*, 74. IV.
 1613
Proportio continua. Erklä-
 rung, 74. Eigenschaften,
 94. 95. IV. 1631
 Proportion. Erklärung, 73.
 Zeichen, 72. Eigenschaf-
 ten, 94. 95. 96. 97. III.
 1010. 1111. IV. 1630.
 1633
 Proportional: Linien, wie
 sie zu finden seyn, 197. IV.
 1774
 Proportional: Zahlen, 96.
 98
- Prosthaphæresis*, III. 1315
 Pult: Dach, 500
 Pulver, wie es gemacht
 wird, II. 525. 526. Ursa-
 chen der Würkung, 526.
 Säge, 526. womit es an-
 zuseuchten sey, 525. 527.
 wie es reißend wird, 527.
 wie man es probirt, 529.
 530. 531. wozu es Anlaß
 gegeben hat, 518
 Pulver: Mühlen, II. 527
 Pulver: Säge, II. 526.
 Punct. Erklärung, 117.
 warum er untheilbar sey,
 117. 118. 121
Puncta flexus contrarii, IV.
 1901
Pupilla, III 954. 960
 Püschel: Kunst, 913
Pycnostylon, 395
 Pyramide. Erklärung, 28.
 Eigenschaft, 128. 232.
 233. 234. 244. Ausrech-
 nung, 236. Rehe, 255
Pyrobologia, II. 517
Pyrotechnia, ibid.
- Q.
- Quadrat. Erklärung,
 124. Beschreibung,
 170. 189. Eigenschaften,
 172. Ausmessung, 174.
 175. wie es in das Pers-
 spectiv zu bringen sey, III.
 1067. 1068
 Quadratische Gleichung.
 Erklärung, IV. 1588. wie
 sie

Register

- sie aufzulösen sey, 1588.
 Exempel, 1590. 1591
 QuadratsLinie, 174
 Quadrat-Maas, 174. 175
 Quadratrix, IV. 1716
 Quadrat-Ruthe, 174
 Quadrat-Schube, ibid.
 Quadratur des Circuls,
 IV. 1853
 „ „ der Krummen Li-
 nien, IV. 1844
 Quadratus, III. 1394
 Quadrat-Wurzel. Erklä-
 rung, 82. wie sie gefunden
 wird, 85. IV. 1587. ihr Lo-
 garithmus, 270
 Quadrat-Zahl. Erklärung,
 83. IV. 1623. wie sie entste-
 het, 84. 85. IV. 1586.
 1587. 1588. Eigenschaf-
 ten, 1745. ihr Logarith-
 mus, 270. ihre Differen-
 tien, IV. 1605
 Quadrat-Zoll, 175
 Quartier-Feld-Schlange,
 II. 533. 553. 562
 R.
 Rabe, III. 1190
 Rabia, III. 1401
 Rad an einer Ase, II. 749
 Rad-Linie, IV. 1717
 Radius des Circuls, 121.
 129. 262
 „ „ der Evolute, IV. 1909
 Räder der Affecten, wie
 sie zuzeichnen seyn, 551
 „ „ in der Mechanik,
 wie sie zuberechnen seyn, II.
 781
 Räder-Werck ohne Rans-
 men, II. 790
 Rajob, III. 1491
 Ramadan, ibid.
 Rarfeulig, 395
 Rasen, II. 717
 Ravelin. Erklärung, II.
 632. Nutzen, 632. Zeich-
 nung, 653. 662. 679
 Raute, 124
 Rechen-Kunst. Erklärung,
 37. wie sie abzuhandeln
 sey, 37
 Rechnnngs-Arten, ihr Ur-
 sprung, 40. 41. ihre An-
 zahl, 41. Rahmen und Er-
 klärungen, 41
 Rechter Winkel, 123. 158
 Rechtwinklichter Triang-
 gel. Erklärung, 123. Ei-
 genschaften, 150. 187. IV.
 1661. 1663. 1669. 1785.
 1795. wie sein Inhalt zu
 finden sey, IV. 1656
 Rectangulum. Erklärung,
 124. Beschreibung, 171.
 Eigenschaft, 172. Aus-
 rechnung, 175
 Rectification der Krum-
 men Linien, IV. 1865
 Regel, III. 1191
 Regel Petri, 99
 Redoute. Erklärung, II. 702.
 Grund-Riß, 703. Profil,
 704
 Reduction zur Heliptick,
 III. 1339. 1342
 Reflexion. Erklärung, III.
 951.

über alle vier Theile.

951. Geseße, 951. 952. *Regula societatis*, 104. 105
IV. 1920 *Regulus*, III. 1191
- Reflexions = Winkel, III. 951 *Reiß= Bret*, 382
- Refraction. Erklärung, III. 951 *Reiß= Kohlen*, II. 522
952. Geseße, IV. 1927. *Reiß= Schiene*, 383. 384
wie ihre GröÙe zuobserviren sey, III. 1014. 1015 *Retrogradus*, III. 1285
- Refraction der Sonne, III. 1228. 1229. 1230 *Rhombus*. Erklärung, 124.
Beschreibung, 171. Eigenschaft, 175. Ausrechnung, 177
- Refractions= Winkel, III. 952 *Riemlein*, 344
- Refringirter Winkel, III. 953 *Rinn= Leisten*, 344
- Regel de quinque*, 103. 104 *Ring um den Mond in der Sonnen= Finsterniß*, III. 1243. 1244
- Regiments = Stücke, II. 533. 553. 562 *Ring um den Saturnus*, III. 1277
- Reguläre Festung, II. 687 *Röhre*, II. 911
- Reguläre Figur. Erklärung, 125. Eigenschaften, 161. 162. 165. 181. Beschreibung, 168. 169. Ausrechnung, 180 *Röhren zu Fern= Gläsern*, III. 1042
- Regulärer Körper. Erklärung, 128. Anzahl, 251. *Römer Eins Zahl*. Erklärung, III. 1503. wie sie zu finden sey, ibid.
- Reihe, 253 *Römische Ordnung*, 358. 374
- Reguläres Dreyeck. Wie seine Seite sich zu dem Diameter des umschriebenen Circuls verhält, IV. 1648 *Römischer Calendar*, III. 1484
- Reguläres Vieleck. Wie es zu beschreiben sey, 168. 169. Ob Renaldinus es richtig zu beschreiben angewiesen hat, IV. 1671 *Rolle*, 752
- Regula composita*, 103. 104 (Wolfs Mathes. Tom. IV.) *Romanische Treppe*, 496
- Regula societatis*, 104. 105 *Ros= Wühlen*, II. 825. 826
- Regulus*, III. 1191 *Rost zum Grund= Baue*, 426. 427
- Reiß= Bret*, 382 *Rückgängig*, III. 1285
- Reiß= Kohlen*, II. 522 *Ruhe= Punct*, II. 752
- Reiß= Schiene*, 383. 384 *Ruhe= Niegel*, II. 550
- Retrogradus*, III. 1285 *Ruthe*. Erklärung, 119.
- Rhombus*. Erklärung, 124. Beschreibung, 171. Eigenschaft, 175. Ausrechnung, 177
- Riemlein*, 344 *Zeichen*, 122
- Rinn= Leisten*, 344 *Sii iii* *Saal*.

Register

S.

- Saal.** Wie er beschaffen seyn soll, 461. 475. 476. 477
- Sächsishe Raute,** III. 1192
- Seule.** Erklärung, 333. 339. wie sie zuproporcioniren sey, 335. 336. Höhe, 360. wie sie zuverdünnen sey, 337. 390. wie eine über die andere aufstellen sey, 414. ihr Rang, 414
- Seulen = Laube,** 393
- Seulen = Stellung,** ibid.
- Seulen = Stuhl,** 339
- Seulen = Weite.** Erklärung, 339. Größe, 394. 395. 396. was dabey in Acht zunehmen sey, 395. 396. 397
- Salpeter.** Wie er zu läutern sey, II. 518. woher er kommt, 519. Eigenschaften, 223. 524. 525
- Sand.** Wie er beschaffen seyn soll, 328. Probe, 328. 329. Arten, 329
- Sappiren,** II. 735. 736
- Satellites Jovis,** II. 1270
- Saturnus,** III. 1141. seine Gestalten, welche man durch das Fern-Glas observirt hat, 1275. 1276. Ähnlichkeit mit dem Monde, 1277. Bewegung um die Sonne, 1284
- Saturnus = Monden,** III. 1273. 1274
- Satz zu dem Feuer, Kugel-Zeuge,** II. 576
- Schaft.** Erklärung, 341. Beschaffenheit, 348. 359. 361. wesentliche Glieder, 351. Höhe, 361
- Schaft = Gefimse.** Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. Höhe, 360. Auslaufung, 361
- Schalt = Jahr,** III. 1481. 1482. 1483
- Schalt = Tag,** III. 1481. 1482
- Schang = Körbe,** II. 719
- Scharivar mah,** III. 1487
- Schatten.** Erklärung, III. 949. Eigenschaften, 949. 965. 966. 967. wie seine Länge zu finden sey, 966. 967. 968. wie dadurch die Höhen zu messen seyn, 967. seine Figur, 969. 970. 971. wie er perspectivisch zu zeichnen sey, 1074
- Schatten der Berge in dem Monde,** III. 1253. 1257
- Scheete.** Erklärung, II. 634. Zeichnung, II. 654
- Scheibe des Klobens,** II. 751
- Scheinbare Größe.** Erklärung,

über alle vier Theile.

klärung, III. 978. wie sie	Schönseulig, 395
zufinden sey, 979	Schöpf-Rad, II. 916
Scheinbare horizontal-	Schöpf-Werck, II. 915
Linie, II. 755	Schorstein, 502
Scheinbarer Diameter	Schranken der Wurzeln
der Sterne, III. 1280.	in Gleichungen, IV. 1733
1281	Schraube. Erklärung, II.
Scheinbarer Horizont,	752. ihr Vermögen, 794.
III. 1132	ihre Eintheilung, 794.
Scheinbare Zeit, III. 1470	795
Scheitel, IV. 1678	Schraubens Mutter, II.
Schemmel-Mörser, II.	752
566	Schraube ohne Ende, II.
Schiefe Ascension. Erklä-	796
rung, III. 1161. wie sie	Schrift. Wie sie auszulegen
zufinden sey, 1161. 1162	sey, III. 1295
Schiefe der Eliptick, III.	Schüsseln zu dem Glas
1155	Schreifen, III. 1060. 1061
Schiefe Descension, III.	Schüge, III. 1142. 1190
1161	Schüsse eines Stücks, wie
Schiefliegende Fläche, II.	weit sie gehen, II. 561
752. 791. 792. 848	Schuhe. Erklärung, 119.
Schieß-Scharten, II. 718	Zeichen, 122
Schiff Jasons, III. 1190	Schulter-Winkel, II. 618
Schlange, II. 533. 553.	Schwan, III. 1190
562. III. 1190	Schwanz-Kiegel, II. 550
Schlangen-Mann, III.	Schwarze Haut, III. 954
1190	Schwächre. Erklärung, II.
Schluß-Stein. Wie er zu-	755. ist unter dem Equa-
zeichnen sey, 409	tore kleiner als gegen die
Schnell-Wage, II. 769.	Pole, III. 1301. 1302
770	Schwächre der Körper in
Schnörckel, 375. Zeich-	flüssiger Materie, I. 851.
nung, 387	865
Schönheit. Erklärung,	! ! der Luft, II. 883. 886
307. wie sie zuerkennen	! ! der Metalle und an-
sey, 308	derer Körper, II. 862
	III III a Schwer

Register

- Schwefel, wie er zuläutern, 121
 II. 520. 521. welcher zu
 dem Pulver am besten sey, 161
 520. wozu er dienet, 521.
 Eigenschaften, 523. 524.
 525
 Schweif der Cometen,
 Was er sey, III. 1392
 Schwung=Räder, II. 837.
 838
Sclerotica, III. 954
Scorpion, III. 1142. 1190
Scorpius, III. 1143
 Scrupel der Breite, III.
 1367. 1368. 1369
 „ der Währe, III. 1421.
 1422
 „ der Verfinſterung,
 III. 1401. 1402. 1420
Secans. Erklärung, 262.
 Ausrechnung, 268. Lo-
 garithmus, 280
 Sechs=Ec. Erklärung,
 125. Eigenschaft, 170.
 Beschreibung, 170
Second flanc, II. 616
Sectio aivina, IV. 1655
Sector. Eigenschaft, 182.
 Ausrechnung, 187
 Secunde, 122. III. 1471.
 wie ſie in trigonometri-
 ſchen Rechnungen zuiſen-
 den ſind, I. 284
 Secundirende Linie, II.
 602
 Seele eines Stückes, II.
 542. 544. 549
 Sehne, 121
 „ „ in dem Circul, 161
 „ „ in der Parabel, IV.
 1637
 Seite der polygonal:Zahl.
 Erklärung, IV. 1624. wie
 ſie zu finden ſey, 1627
Semidiameter, 121
Semiordinate, IV. 1678
 Senkrechte Linie, 123
September, III. 1484
 Serpentincl, II. 533. 553.
 562
 Seger, II. 555
 Seg=Kolben, *ibid.*
Sextilis, III. 1394
Schaaban, III. 1491
Schabat, III. 1489
Scharvall, III. 1491
Schebat, *ibid.*
 Sicherzpfahl, II. 823
 Sichtbare Bewegung des
 Mondes von der Son-
 ne, III. 1414. 1415
 „ „ Breite des Mon-
 des, III. 1417
 „ „ Finſterniß, III. 1242
 „ „ Länge des Mon-
 des, II. 1410
 Sichtbare Zusammen-
 kunft, 1416
Sidera medicæ, III. 1270
 - - *Urbanoclaviana*, III.
 1274
 Sieben=Gestirn, III. 1191
 Siegel=Wachs, wie es zu
 machen ſey, III. 1063
 Sinus.

über alle vier Theile.

- Sinus*, Erklärung, 261. Eigenschaften, 261. 262. 280. Ausrechnung, 264. Gebrauch, 281. IV. 1875. wie besonders der von 18° , IV. 1655. der von $22^{\circ} 30'$, 1650. der von 60° , 1649. und eines vielfachen Drogens zu finden sey, 1664. wie ihre Logarithmi zuzusuchen seyn, I. 276. wie aus ihnen die Wogen zu finden seyn, IV. 1873
- Sinus artificialis*, III. 1100
- - *complementi*, 262. 264
 - - *totus*, 262
 - - *versus*, 262. IV. 1875
- Sivan*, III. 1491
- Solstitium*, wie es zu observiren sey, III. 1305
- Sommer*, III. 1444
- Sonne*, ihre Flecken, III. 1233. Natur, 1234. Figur, 1236. Bewegung um die Aze, 1236. Bewegung durch den Thierkreis, 1139. 1140. 1308. ob sie sich um die Erde bewegt, 1293. 1295. ihre Eccentricität, 1312. wie sie die Fläche bescheint, 1524. 1525. ihre Weite von der Erde, 1376. ihre Grösse, 1379. 1381
- Sonnen = Circul.* Erklärung, III. 1495. Grösse, Grösse, 1496. wie er zu finden sey, 1497
- Sonnen = Finsterniß.* Erklärung, III. 1242. Umstände und Beschaffenheit, 1239. 1243. 1244. 1245. Ursach, 1241. 1242. 1257. wo sie gesehen wird, 1409. wenn sie sich ereignet, 1410. wie sie ausgerechnet, 1410. und observirt wird, 1425
- Sonnen = Jahr*, III. 1480. wie seine Grösse zu finden sey, 1308
- Sonnen = Monat*, III. 1479
- Sonnen = Stunden*, III. 1164
- Sonnen = Uhr*, III. 1523
- Sonntage*, auf welche Tage in dem Jahre sie fallen, III. 1498
- Sonntags = Buchstab.* Erklärung, III. 1479. wie er zu finden sey, 1497
- Saphar*, III. 1491
- Sphæra obliqua*, III. 1450
- - *parallela*, III. 1448
 - - *recta*, III. 1447
- Sphærica*, III. 1125
- Sphärische Spiegel*, III. 990
- Sphärischer Triangel*, Erklärung, III. 1083. Eigenschaften, 1087. 1089. 1090

Register

- Sphärische Trigonometrie,** III. 1083
Sphärischer Winkel, III. 1084
Spica virginis, III. 1191
Spiegel. Erklärung, III. 989. Eigenschaften, IV. 1921
Spiegel-Gewölbe, 472
Spitz-Kaum. Erklärung, II. 535. wie er zu finden sey, 536. sein Nutzen, 536
Spindel, II. 752
Spiral-Linie. Erklärung, IV. 1718. Subtangens, 1760. Quadratur, 1859
Spiral-Linien von unendlichen Geschlechtern. Erklärung, IV. 1718. Subtangens, 1821. 1822. Quadratur, 1860. 1861
Spitziger Winkel, 123. 158
Spitzwinklchter Triangel, 123
Spring-Brunnen durch den Fall, II. 924. durch die Heber, 930. durch die Wärme, 939. durch die Luft, 936
Spring-Brunnen, welcher unterweilen aufhört, II. 932
Stab. Erklärung, 343. Zeichnung, 344. Grösse, 359
Stäblein, 343
Staber-Zeug, II. 817
Stadt-Thor, 451
Stärke der Linie, II. 602
Stamm, 341
Stampfer, II. 555
Stangen-Zirkel, 121
Stationarius, III. 1285
Stech-Heber, III. 929
Stehende Mörtel, II. 565
Steine, wie ihre Güte zu erforschen sey, 322. wenn sie sollen gebrochen werden, 323. wie man sie öls tränckt, 467. wie sie in dem Grund-Baue zulegen seyn, 427
Steinbock, III. 1142. 1190
Stein = Carthagen, II. 582
Stein-Galle, 323
Steinhauen, wie es beschaffen sey, 472
Stein = Klippen in dem Monde, III. 1256
Stein-Stücke, II. 582
Stell-Riegel, II. 550
Stengel, 354
Stern, wie lange er über dem Horizonte bleibt, III. 1198. wenn er in den Meridianum kommt, 1199. 1202. wie er darinnen zu observiren sey, 1151. wenn er auf- und untergeht, 1200. mit welchem Punkte der Ecliptick er aufgeht, 1203. 1204. 1206.

über alle vier Theile.

1206. wenn er mit der Sonne untergeht, 1207. wenn er sich unter die Sonnen-Strahlen verbirgt und wieder herausrückt, 1210. welche niemals auf- und welche niemals untergehen, 1212. 1213. ihre scheinbare Größe, 1194. ihre Anzahl, 1189. 1193. Weise von der Erde und Natur, 1387. besondere Namen derselben, 1190
- Stern in dem Auge, III. 954
- Stern-Rad, II. 751
- Stern-Schänge. Erklärung, II. 702. Grundriß, 705
- Stiefel in dem Druck-Werke, II. 920
- Stillstand eines schweben Körpers, II. 755. 756. 758. 760
- der Planeten, III. 1284
- Stier, III. 1142. 1190
- Stinkende Kugeln, II. 577
- Stirn-Rad, II. 751. 785
- Stock-Panster, II. 819
- Stoß in dem Mörser, II. 564
- Straub-Zeug, II. 817
- Streiche, II. 615
- Streichende Defens-Linie, II. 616
- Streich-Winkel, II. 618
- Streifen, 344
- Struben, wie sie beschaffen seyn sollen, 461. 475. 476
- Stück. Erklärung, II. 532. Arten, 532. Materie, 534. Theile, 542. 543. Beschaffenheit, 542. Ladung, 553. Richtung, 559. 560. Länge, 544. 545. Zeichnung, 546
- Stück-Gießen, II. 534
- Stück-Pulver, II. 526
- Stütze. Erklärung, 333. Gebrauch, 335. Beschaffenheit, 336. 337
- Stumpfer Winkel, 123. 159
- Stumpfwindlichter-Trichter, 123
- Stunde. Erklärung, III. 1471. Arten, ibid. wie sie mit einander zu vergleichen seyn, 1473
- Stunde der ersten Bewegung, III. 1164
- Stufen auf der Treppe, wie sie seyn sollen, 594. 495
- Sturz-Kinne, 344
- Subnormal-Linie. Erklärung, IV. 1809. wie sie zu finden seyn, 1816
- Subtangens. Erklärung, IV. 1808. wie sie zu finden seyn, 1809
- Subtrahiren. Erklärung, 42. Regeln für ganze Zahlen

Register

- Zahlen, 42. für gebrochne, 79. für Buchstaben, IV. 1556. 1557. für irrational-Zahlen, 1568. Zeichen, I. 57. IV. 1553
 Süden, III. 1454
 Süder-Pol, III. 1129. 1433
 Südliche Krone, III. 1190
 Summe, 41
 Summiren, IV. 1840
 Summirende Zahlen, 41
 Syllogismus, Nutzen in der Mathematick, 27
 Symmetrie, 313
 Syn, III. 1486
 Syrodischer Monat, III. 1489
*Systema mundi Copernic-
 um*, III. 1302
 - - *Tychonicum*, III. 1288.
 1291
 Syftilon, 395

T.
Tabula equationum, III. 1323
 - - *curtationum*, III. 1343
 - - *inclinationum*, III. 1342
 - - *latitudinum & longitu-
 tudinum*, III. 1188. 1189
 - - *motus latitudinis*, III. 1354
 - - *motuum mediorum*, III. 1310
 - - *sinuum & tangentium*, 263
 Tag. Erklärung, III. 1469.
 wenn er die ganze Nacht
 durch schimmert, 1213.
 1214. wie er ab- und zu-
 nimmt, 1445. wie lange er
 währt, III. 1166
 Tage-Circul, III. 1133
 Tages = Anbruch. Erklä-
 rung, III. 1211. Ursach,
 1212. wie er außzurech-
 nen sey, 1213. 1214
 Talud, II. 609
 Tamuz, III. 1489. 1491
 Tangens. Erklärung, 262.
 Ausrechnung, 267. Ge-
 brauch, 285. 286. 287.
 Logarithmus, 279. Eis-
 genschaften, 285. wie dar-
 aus der Bogen zu finden
 sey, IV. 1870
 Tangens des vielfachen
 Winkels, wie er zu fin-
 den sey, IV. 1667
 - = der Krümmen Li-
 nien. Erklärung, IV.
 1808. wie er zu finden sey,
 1809
 Taufe der Feuer-Kugeln,
 II. 579
 Taurus, III. 1143
 Tebeth, III. 1492
 Tekuphæ, III. 1493
 Tenaille simple, II. 634
 - - double, II. 634
 Terreplain, II. 609
 Tetraëdram. Erklärung,
 252. Rehe, 253
 Theia

über alle vier Theile.

Theilung der geraden Linie,	198	Trapezium. Erklärung,	125.
Theorema,	21	wie es zutheilen sey,	191
Theorema Pythagoricum,	187. 188	Traversen. Erklärung,	II. 638. Nutzen, 638. Zeichnung,
Theorica,	III. 1125	Trenchéen,	II. 726
Thermometra concordantia,	II. 901	Treppe. Erklärung,	493.
Thermometrum,	II. 896	Beschaffenheit,	493. 494.
Thermoscopium,	ibid.	495. Zeichnung,	496
Thesis,	22	Triangel. Erklärung,	123.
Thier-Kreis,	III. 1144	Eigenschaften,	138. 150.
Thor an einer Festung,	II. 720	153. 155. 156. 177. 187.	
Thoth,	III. 1485	195. 196. 198. III. 1089.	
Thür. Erklärung,	450.	IV. 1667. Beschreibung,	
Breite und Höhe,	ibid.	I. 140. 141. Ausrechnung,	178. IV. 1661.
Figur, 451. wie sie in das		Theilung, I. 223. wie er	
Perspectiv zubringen sey,	1071	in das Perspectiv zubringen	sey, III. 1066. 1067
Thür, welche spricht, wenn		Triangel, der südliche, III.	
man durchgeht, II. 925		1190. der nordliche, 1190	
Thür-Schwellen, 452		Triangular-Zahl, IV. 1623	
Tiefe der Sonne, wenn der		Triangulum æquatorium, III.	
Tag anbricht, III. 1211.		1315	
wie sie zu finden sey, 1217		- . æquilaterum, 124	
Tisbin, III 1489. 1491		- . æquicurum, ibid.	
Todte Kraft, III. 746		- . scalenum, ibid.	
Tonnen-Gewölbe, 471		Triglyphen, 386	
Toricellianische Röhre,	II. 890	Trigonometrie. Erklärung,	261. Nutzen, 259.
Toucan,	III. 1190	260	
Total = Finsterniß, II.	1402	Trigonus, III. 1394	
Transcendentische Linie,	IV. 1679	Trillings-Stöße, II. 787	
Transportaur, 123		Trinomische Wurzel, IV.	
		1586	
		Trompeter = Gängelein,	
		449	
		Tre-	

Register

- Tropicus cancri*, III. 1144
capricorni, III. 1434
 Trilling, 751. 789
 Tunchen, 455 456
 Tuscanische Ordnung.
 Erklärung, 357. Glieder,
 365
Tybi, III. 1485
Tykymt, III. 1486
Tyr, III. 1486
Tysbas, III. 1486
- V. U.
- V**ariation, III. 1365.
 1366
 Vaubanische Fortifica-
 tion, Maximen, II. 673.
 Ausrechnung der Linien,
 674. Grund: Riß, 676.
 Profil, 680. Werth, 689
 Verstärkte Manier, Ma-
 ximen, 683. Grund: Riß,
 684. Werth, 686
Veadar, III. 1491
 Ueberschlag, 344
Vectis heterodromus, II. 775
 - - *heterodromus*, ibid.
 Ventil, II. 918
Venus, III. 1141. ihre Aehn-
 lichkeit mit dem Monde,
 1277. Flecken, 1268.
 Berge, 1267. Bewegung
 um die Ape, III. 1269.
 um die Sonne, 1265.
 1284
Venus in Sole, III. 1264
- Veränderliche Grösse. Er-
 klärung, IV. 1801. Zei-
 chen, 1802
 Verbürste Circul, 471
 Verdeckter Weg, II. 637
 Verdruckte Circul, 471
 Verdünnung der Seulen,
 337
 Vergrößerungs = Gläser,
 III. 1029. 1030. 1052. wie
 viel sie vergrößern, 1050,
 1051
 Verhältniß, 73. ihre Ver-
 änderungen, IV. 1633.
 1634. welche in der Bau-
 kunst zugebrauchen sey,
 I. 310. 311
 Verhältniß der irratio-
 nal-Größen, IV. 1568
 Verjüngter Maas = Stab,
 136. 200. 201
 Verkleinerungs = Gläser,
 III. 1030. 1031
 Verkehrte Regel Petri,
 102
 Verkehrter Karnieß, 346
 Vertical = Circul, III. 1145
 Vertical = Uhren, III. 1527
 Vertical = Winkel, 133.
 III. 1086
 Viel-Eck, 125
 Vieleckichtes Glas, III.
 1057
 Viertel des Mondes, III.
 1246
 Viertel = Feld = Schlange,
 II. 533. 553. 562
 Vier-

über alle vier Theile.

Viertel-Feld=Strick, <i>ibid.</i>	Unter=Saum, 344
Viertel=Stab. Erklärung, 343. Zeichnung, 344.	Unterscheid, 42
Größe, 359	Unterschlägiges Wasser=
<i>Vindemiatrix</i> , II. 1191	Rad. Erklärung, I. 801.
<i>Virgo</i> , III. 1143	wo es zugebrauchen sey, 812.
Visir=Schuß, II. 563	wie das Wasser darz
Visir=Stab, 245. 246	auf zuleiten sey, 819
Unbewegliche Feste, 1509.	Unveränderliche Größe.
1510	Erklärung, IV. 1801. Zei
Unterterminirte Aufgabe, IV. 1743. Exempel dazu, <i>ibid.</i>	chen, 1802
Undeutlicher Begriff. Er	Unvollständiger Begriff, 8
klärung, 7. wenn man mit ihm zufrieden seyn kann, 8	Voll=Erde, III. 1386
Unendlich Kleine Größe, IV. 1799. 1800	Voll=Mond, III. 1246
Unförmige Sterne, III. 1192	Vollkommenheit einer Se
Ungerade Zahlen, ihre Ei	stung, II. 597
genschaften, IV. 1608. 1609. 1610	= = eines Gebäudes, 307
Ungleichseitiger Triang	Vollständiger Begriff, 7
gel, 124	Vorgebürge in dem Mon
Unordentliche Figur, 125	de, III. 1255
Unordentlicher Körper, 128	Vorgemächer, wie sie be
Unter=Balcken, 342	schaffen seyn sollen, 461
Untergang der Sterne, III. 1133. 1200	Vorstechung, 340
= = der Sonne, III. 1180	
Unsichtbar, warum einige	
Eachen werden, III. 957	
Unsichtbare Finsterniß, III. 1242	
	W.
	Wände, wie sie in das
	Perspectiv zubringen
	seyn, III. 1070
	Wärme, wie sie bald in das
	Zimmer bringt, 488
	Wässerige Feuchtigheit, III. 955
	Waffen=Plätze, II. 681
	Wage. Erklärung, II. 764
	wie sie zumachen, <i>ibid.</i> zu
	probiren sey, 765
	Waage,

Register

- Wage, III. 1142. 1190
 Wahre Bewegung, III. 1314
 Wahrer Horizont, II. 1131
 Wahre Wurzel, IV. 1718
 Wall, seine Nothwendigkeit, II. 606. Höhe, 611. 612. Figur, 613. 614. wie er aufzuführen sey, 716
 Wall=Fisch, III. 1190
 Wall=Gang, II. 609
 Walze, 126
 Wand=Pfeiler, 334
 Wand=Seule, ibid.
 Wasser, wie es zu der Bewegung der Mühlen gebraucht wird, II. 801
 Wasser=Kunst, II. 922. 923
 Wasser = Schlange, III. 1190
 Wasser=Mann, III. 1142. 1190
 Wasser=Schraube, II. 911
 Wasser=Stand, II. 812
 Wasser = Wägen, II. 805. 809
 Wasser=Wage, II. 805
 Wehr=Bau, II. 821
 Wein=Monat, III. 1484
 Weiten der Verrück, wie sie gemessen seyn, 134. 144. 145. 201. 294. 295. III. 1435. 1460
 „ „ der Planeten von der Erde, 1376. 1345. 1348. von der Sonne, III. 1321. 1347
 Weiten der Sterne. Erklärung, III. 1177. wie sie zu observiren seyn, 1177. 1178. Nutzen, 1180
 Weitselig, 395
 Welsche *Practica*, 108
 Welt, wie sie aussieht, III. 1126. 1127
 Welt=Axe, III. 1129
 Welt=Bau, (neue) 1387
 Welt=Gebäude, wie es beschaffen sey, III. 1296
 Welt=Gegenden, III. 1454. 1455
 Welt=Kugel, III. 1127
 Welt=Pole, III. 1128
 Wendel=Treppe. Erklärung, 495. Beschaffenheit, 496. Zeichnung, 497
 Wendungs=Punct. Erklärung, IV. 1901. wie er zu finden sey, 1904
 Weniger, IV. 1553
 Wesentliche Glieder, 351
 Wetter=Glas, wie es zumachen sey, II. 897. besondere Phänomena, 899. 900
 Widder, III. 1142. 1190
 Wiederkehrungs=Punct. Erklärung, IV. 1901. wie er zu finden sey, 1904
 Wiederlage der Gewölber, 474
 Widerstand in Bewegung der Maschinen, II. 835
 Widerstehende Kraft, II. 844
 Win=

über alle vier Theile.

- Winkel, Erklärung, 122.
 Maas, ibid. Eigenschaften,
 ten, 130 131. 153. 154.
 157. wie er gemessen, 134.
 zu beschreiben, 136. auf
 dem Felde abzustechen sey,
 144. Theilung in zween
 Theile, 164
 Winkel in regulären Viel-
 Ecken, 165. in jedem
 Viel-Eck, 166
 Winkel, welcher allzuspiz-
 hig ist, wie er zu fortifici-
 ren sey, II. 697. welcher
 einwärts gebogen ist, wie
 er zu fortificiren sey, 698
 Winkel an der Periphe-
 rie, 157. 158
 „ „ an der Sonne, III.
 1314. 1344
 Winkel-Zacken, 150. 159
 Winkel-Messer, 123
 Wind, II. 537
 Wind-Mühlen, II. 824.
 825
 Wind-Raum, II. 535
 Wind-Wäge. Erklärung,
 II. 879. wie sie zu machen,
 903. und zugebrauchen
 sey, 904
 Winter, III. 1444
 Winter-Monat, III. 1484
 Wischer, II. 555
 Wisch-Kolben, ibid.
 Woche, III. 1478
 Wolf, III. 1190
 Wohlgereimtheit, 313
 Würfel, 127
 Würfel in der Bau-Kunst.
 Erklärung, 341. Beschaf-
 fenheit, 348. 349. Höhe,
 360. Auslaufung, 361
 Wulst, 344
 Wunderbarer Stern, III.
 1388
 Wurzel, ihre Arten, 1591.
 IV. 1718. Rechnung mit
 Buchstaben, 1563. wie sie
 aus jeder Dignität zuzie-
 hen seyn, 1602. Auszie-
 hung, I. 86. 91
 Wurzel der Gleichung.
 Erklärung, IV. 1718. Ei-
 genschaften, 1719. 1720.
 Veränderung, 1721.
 Schranken, 1733. Aus-
 ziehung, 1735. wie sie
 durch Näherung zu finden
 sey, 1738
 Wurzel-Tafeln, 84
 Wurzel-Zeichen, IV. 1565

N.

Neudegerdisches Jahr,
 III. 1487. 1488. wie sein
 Anfang zu finden sey, 1488

S.

Sapfen, 386
 Zahl. Erklärung, 38.
 Beschaffenheit, 39. 40. ih-
 re Veränderungen, 40. 41.
 wie

Register über alle vier Theile.

wie sie ausgesprochen wird, 47. 48	Ziegel=Erde, 327
Zahl der Winkel in der polygonal-Zahl, IV. 1625	Zieh=Panster, II. 819
Zapfen=Stücke, II. 542. 543	Zieh=Pengel, II. 796
Zauber=Laterne, III. 1054	Ziffern, 47
Zehen=Leck, wie seine Seite zu finden sey, IV. 1652. 1653	Zimmer, ihre Figur, 458.
Zehlen, was es heiße, 38	Verhältniß der Länge zu der Breite, 459. Höhe, 459. 460. wie sie anzulegen seyn, 478. 479
Zehler eines Bruchs, 77	Zierrathen des Gebäudes. Erklärung, 308. wie viel sie nöthig sind, 309. 310
Zelt Dach, 500	Zirkel, 121
Zeichen der Zehlen, 47	Zodiacus, III. 1144
= = der Zeit, III. 1493. 1494	Zoll. Erklärung, 119. Zeichen, 122
Zeichnen, wie solches genau geschehen kann III. 1078	Zona frigida, III. 1443
Zeichnung der Figuren, 142. was sie nußt, 143	- - temperata, III. ibid.
Zeiger, die Mittags Höhen zu finden, III. 1150	Zona torrida, III. ibid.
Zeit, wie man sie aus der Höhe der Sonne, 1171. und der Sterne findet, 1220. 1222. 1223	Zünd=Loch in dem Stücke, II. 547
Zenith, III. 1129	Zünd=Röhre in der Bombe, II. 570
Zeugmeisterei=Kunst, II. 517	Zusammendrücken, II. 878
Zerstreunungs=Punct, III. 1028	Zusammenkunft, III. 1394
Ziegel, wie sie zutreiben, 324. zuprobiren seyn, 327	Zusätze. Erklärung. 28. Unterscheid, 28. 29
	Zwerg=Axe, IV. 1698
	Zwey mittlere proportionale Linien, wie sie zu finden seyn, IV. 1774
	Zwillinge, III. 1142. 1190
	Zwischen=Tiefe, 354. 396

E N D E des Registers.



Bericht an den Buchbinder.

Die Kupfer müssen zu Ende einer jeden Disciplina
dergestalt gebunden werden, daß man sie
ganz heraus schlagen kann.

	Nemlich in dem ersten Theile.
Pag. 256.	Fig. <i>Geom. Tab. I. bis XXIV.</i>
300.	<i>Trigon. Tab. I. bis IV.</i>
510.	<i>Archit. Tab. I. bis XXX.</i>
	In dem andern Theile.
Pag. 592.	Fig. <i>Artiller. Tab. I. bis VII.</i>
740.	<i>Archit. mil. Tab. I. bis XIII.</i>
838.	<i>Mechan. Tab. I. bis VI.</i>
872.	<i>Hydrostat. Tab.</i>
906.	<i>Aërometr. Tab.</i>
942.	<i>Hydraul. Tab. I. bis III.</i>
	In dem dritten Theile.
Pag. 988.	Fig. <i>Optic. Tab.</i>
1013.	<i>Catoptr. Tab.</i>
1064.	<i>Dioptr. Tab. I. II</i>
1078.	<i>Perspect. Tab. I. II, III.</i>
1120.	<i>Trig. Sphar. Tab.</i>
1426.	<i>Astron. Tab. I. bis VIII.</i>
1464.	<i>Geogr. Tab. I.</i>
1542.	<i>Gnomon. Tab. I. II. III.</i>
	In dem vierten Theile.
Pag. 1934.	Fig. <i>Algebr. Tab. I. bis XI.</i>

